Oppgaver og fasit til kapittel 6

Mange av oppgavene i dette kapitlet brukes for første gang, og det er sannsynligvis flere fasitfeil enn normalt. Finner du en feil, så send en melding til *lindstro@math.uio.no*.

Oppgaver til seksjon 6.1

1. Regn ut dobbeltintegralene

a) $\iint\limits_R xy\,dxdy$ der $R = [1,2]\times[2,4]$

b) $\iint\limits_R (x+\sin y)\,dxdy$ der $R = [0,1]\times[0,\pi]$

c) $\iint\limits_R x^2e^y\,dxdy$ der $R = [-1,1]\times[0,1]$

d) $\iint\limits_R x\cos(xy)\,dxdy$ der $R = [1,2]\times[\pi,2\pi]$

e) $\iint\limits_R xye^{x^2y}\,dxdy$ der $R = [0,2]\times[1,2]$

f) $\iint\limits_R \ln(xy)\,dxdy$ der $R = [1,e]\times[1,e]$

g) $\iint\limits_R \frac{1}{1+x^2y}\,dxdy$ der $R = [1,\sqrt{3}]\times[0,1]$

2. Bruk MATLAB til å regne ut integralene i oppgave 1.

3. Vis at enhver nedre trappesum til en funksjon f over et rektangel R er mindre enn eller lik enhver øvre trappesum, dvs. at hvis Π_1 og Π_2 er to partisjoner av R, så er $N(\Pi_1)\leq Ø(\Pi_2)$. *Hint:* La Π være en tredje partisjon som inneholder alle delepunkter i både Π_1 og Π_2, og vis at $N(\Pi_1)\leq N(\Pi)\leq Ø(\Pi)\leq Ø(\Pi_2)$

4. Vis at f er integrerbar over R hvis og bare hvis det for hver $\epsilon>0$ finnes en partisjon Π slik at $Ø(\Pi)-N(\Pi)<\epsilon$. (Du kan få bruk for forrige oppgave)

5. Bevis setning 6.1.2 (du kan få bruk for de to foregående oppgavene).

6. Vis at funksjonen $f(x)=x^2$ ikke er uniformt kontinuerlig på $\mathbb{R}$.

7. Anta at $f: R\to\mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon på et rektangel $R=[a,b]\times[c,d]$. Vis at det finnes et punkt $(\bar{x},\bar{y})$ i R slik at

$$\frac{\iint_R f(x,y)\,dxdy}{|R|} = f(\bar{x},\bar{y})$$

der $|R|$ er arealet til R. Dette kalles ofte *middelverdisetningen for dobbeltintegraler.*

Oppgaver til seksjon 6.2

1. Regn ut dobbeltintegralene

a) $\iint\limits_R x^2y\ dxdy$ der $R = \{(x, y) \colon 0 \le x \le 2 \text{ og } 0 \le y \le x\}$

b) $\iint\limits_R (x + 2xy)\, dxdy$ der $R = \{(x, y) \colon 0 \le x \le 3 \text{ og } x \le y \le 2x + 1\}$

c) $\iint\limits_R y\ dxdy$ der $R = \{(x, y) \colon 1 \le y \le 2 \text{ og } y \le x \le y^2\}$

d) $\iint\limits_R x \cos y\ dxdy$ der $R = \{(x, y) \colon 0 \le y \le \frac{\pi}{2} \text{ og } 0 \le x \le \sin y\}$

e) $\iint\limits_R e^{x^2}\ dxdy$ der R er området i første kvadrant avgrenset av x-aksen og linjene $x = 1$ og $y = x$.

f) $\iint\limits_R x^2y\ dxdy$ der R er området avgrenset av kurvene $y = x^2$ og $y = \sqrt{x}$.

g) $\iint\limits_R x \cos(x + y)\ dxdy$ der R er trekanten med hjørner $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, (π, π).

h) $\iint\limits_R \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\ dxdy$ der R er området gitt ved $0 \le y \le \sin x$ og $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

i) $\iint\limits_R x\ dxdy$ der R er området mellom kurvene $y = \ln x$ og $y = \frac{x-1}{e-1}$.

2. Bruk MATLAB til å regne ut integralene i oppgave 1.

3. Noen integraler er enklere å regne ut hvis vi bytter integrasjonsrekkefølgen. Løs disse integralene ved å utføre integrasjonene i motsatt rekkefølge. *Hint:* Lag en skisse over integrasjonsområdet før du prøver å bytte integrasjonsrekkefølgen.

a) $\int_0^1 \left[\int_y^1 e^{x^2}\ dx\right] dy$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y}\ dy\right] dx$

c) $\int_0^1 \left[\int_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{x}{y^2}}\ dy\right] dx$

4. Vis at verdien til $\iint_A f(x, y)\ dxdy$ ikke avhenger av hvilket rektangel R vi bruker i definisjonen.

5. Anta at R_1 og R_2 er to disjunkte mengder (dvs. at $R_1 \cap R_2 = \emptyset$), og at f er integrerbar over både R_1 og R_2. Vis at

$$\iint_{R_1 \cup R_2} f(x, y)\ dxdy = \iint_{R_1} f(x, y)\ dxdy + \iint_{R_2} f(x, y)\ dxdy$$

Hint: Du kan bruke setning 6.1.2(ii).

Oppgaver til seksjon 6.3

1. Løs integralet ved å bruke polarkoordinater:

a) $\iint_R xy^2\, dxdy$ der R er området i første kvadrant som ligger innenfor sirkelen $x^2 + y^2 = 9$

b) $\iint_R (x^2 + y^2)\, dxdy$ der R er området i første kvadrant som ligger innenfor sirkelen $x^2 + y^2 = 25$ og mellom linjene $y = 0$ og $y = x$.

c) $\iint_R e^{x^2+y^2}\, dxdy$ der R er området mellom sirklene om origo med radier lik 1 og 4.

d) $\iint_R xy\, dxdy$ der R er området i første kvadrant avgrenset av x-aksen, linjen $y = x$ og sirkelen $x^2 + y^2 = 1$

e) $\iint_R (x^2 - y^2)\, dxdy$ der R er området i tredje kvadrant som ligger mellom linjene $y = \sqrt{3}\,x$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ og innenfor sirkelen $x^2 + y^2 = 1$.

f) $\iint_R \sqrt{2 - x^2 - y^2}\, dxdy$ der R er den delen av sirkelen $x^2 + y^2 \leq 1$ som ligger i første kvadrant.

g) $\iint_R \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}\, dxdy$ der R er sirkelen $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$

2. Bruk MATLAB til å regne ut integralene i oppgave 1.

3. La R være sirkelskiven med sentrum i (1,0) og radius 1.

a) Vis at dersom f er en kontinuerlig funksjon definert på hele R, så er

$$\iint_R f(x,y)\, dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2\cos\theta} f(\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr \right] d\theta$$

b) Regn ut $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$.

4. Vi har en positiv kontinuerlig funksjon $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Et område A består av de punktene i planet som har polarkoordinater (r, θ) slik at $\alpha \leq \theta \leq \beta$, $0 \leq r \leq r(\theta)$. Vis at arealet til A er

$$|A| = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r(\theta)^2\, d\theta$$

Bruk denne formelen til å finne arealet til området avgrenset av kurven

$$r(\theta) = \sin(2\theta) \qquad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Lag en skisse av området.

Oppgaver til seksjon 6.4

1. Beregn volumet til området E når

a) $E = \{(x, y, z)\colon 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le x + y^2\}$

b) $E = \{(x, y, z)\colon 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x, 0 \le z \le x^2\}$

c) $E = \{(x, y, z)\colon -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, -xy \le z \le 3 - xy\}$

d) E er området over xy-planet og under grafen $z = \sqrt{32 - 2x^2 - 2y^2}$

e) E er området som ligger under grafen $z = x^2 - y^2$ og over sirkelskiven $x^2 + y^2 \le 1$

f) E er området som ligger over xy-planet og under grafen $z = 4 - (x - 2)^2 - (y + 1)^2$

2. En trekantet plate har hjørner i $(0, 0)$, $(1, 0)$ og $(1, 1)$ og tetthet $f(x, y) = x$. Finn massemiddelpunktet.

3. En plate dekker området $R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1\}$ og har tetthet $f(x, y) = xy$. Finn massemiddelpunktet.

4. Regn ut overflatearealet til en kule med radius R.

5. Finn arealet til flaten $z = x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \le 4$.

6. Finn arealet av den delen av kjegleflaten $z^2 = x^2 + y^2$ som ligger mellom $z = 0$ og $z = 1$.

7. Finn arealet av den delen av kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ som ligger over sirkelen $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \le \frac{1}{4}$.

8. Vis at arealet til en flate

$$\mathbf{r}(r, \theta) = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\sin\theta\,\mathbf{j} + f(r, \theta)\,\mathbf{k} \qquad \text{der}(r, \theta) \in A$$

er (under passende betingelser) gitt ved

$$\iint_A \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2}\; r\,dr d\theta$$

9. Regn ut flatearealet $\iint_T x^2\,dS$ når T er flaten gitt ved $z = x^2 + y^2$ det $x^2 + y^2 \le 1$.

10. Regn ut flateintegralet $\iint_T xyz^2\,dS$ der T er den delen av sylinderflaten $x^2 + y^2 = 4$ der $x \ge 0$, $y \ge 0$ og $0 \le z \le 1$.

11. Regn ut flateintegralet $\iint_T z^2\,dS$ når T er torusen

$$\mathbf{r}(u, v) = (5 + 3\cos u)\cos v\,\mathbf{i} + (5 + 3\cos u)\sin v\,\mathbf{j} + 3\sin u\,\mathbf{k} \qquad u, v \in [0, 2\pi]$$

Du kan få bruk for noen av regningene i eksempel 3.

12. En sylinderflate T har parametriseringen

$$\mathbf{r}(u,v) = u\,\mathbf{i} + 5\cos v\,\mathbf{j} + 5\sin v\,\mathbf{k}, \qquad u \in [0,2], v \in [0,2\pi]$$

Tegn en skisse av flaten og regn ut flateintegralet $\iint_T x\,dS$.

13. Forklar at en kule om origo med radius R har parametriseringen

$$\mathbf{r}(\theta,\phi) = R\cos\theta\sin\phi\,\mathbf{i} + R\sin\theta\sin\phi\,\mathbf{j} + R\cos\phi\,\mathbf{k}, \qquad \theta \in [0,2\pi], \phi \in [0,\pi]$$

Regn ut $\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}\right|$. Regn også ut flateintegralet $\iint_T xy\,dS$ når T er den delen av kuleflaten som ligger i første oktant (dvs. området der $x, y, z \geq 0$).

14. En avkortet kjegle T har parametriseringen

$$\mathbf{r}(u,v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\sin v\,\mathbf{j} + u\,\mathbf{k} \qquad u \in [1,2], v \in [0,2\pi]$$

Regn ut $\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|$. Regn også ut flateintegralet $\int_T x^2 z\,dS$.

15. Finn massemiddelpunktet til halvkulen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, når massetettheten er 1.

16. (Prøveeksamen i MAT1110, 2004)

(a) La T være området som ligger inni både sylinderen $x^2 - 2x + y^2 = 0$ og kulen $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Finn volumet til T.

(b) Finn arealet av den delen av overflaten til T som ligger på kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

17. (Eksamen i MAT1110 13/8, 2004) La D være det begrensede området i $\mathbb{R}^3$ som ligger over xy-planet og inni både paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ og sylinderen $x^2 + y^2 = 1$.

a) Finn volumet til D.

b) Finn arealet av den delen av randflaten til D som ligger på paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$.

18. (Eksamen i MAT1110 13/6, 2007)

a) Vis at volumet til omådet avgrenset av planet $2x + 4y - z = -4$ og paraboloiden $z = x^2 + y^2$ er gitt ved

$$V = \iint_D \left(2x + 4y - x^2 - y^2 + 4\right)\,dxdy$$

der D er sirkelen med sentrum i $(1,2)$ og radius 3.

b) Regn ut V.

19. (Eksamen i MAT1110 14/6, 2006) R er området i $\mathbb{R}^3$ avgrenset av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ og planet $z = 2x + 6y - 6$.

a) Forklar at volumet til R er

$$V = \iint_A (2x + 6y - 6 - x^2 - y^2)\, dxdy$$

der $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-3)^2 \leq 4\}$.

b) Regn ut V.

c) Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 z\,\mathbf{i} + 2xyz\,\mathbf{j} + xy^2\,\mathbf{k}$$

er konservativt. Regn ut $\oint_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$ der

$$\mathbf{G}(x, y, z) = (y^2 z + z)\,\mathbf{i} + 2xyz\,\mathbf{j} + xy^2\,\mathbf{k}$$

og der C er skjæringskurven til flatene $z = x^2 + y^2$ og $z = 2x + 6y - 6$. Kurven er orientert mot klokken når du ser den ovenfra.

Oppgaver til seksjon 6.5

1 Bruk Greens teorem til å regne ut linjeintegralene. I alle tilfeller er kurven $\mathcal{C}$ positivt orientert.

a) $\int_\mathcal{C} (x^2 + y)\, dx + x^2 y\, dy$ der $\mathcal{C}$ er omkretsen til kvadratet med hjørner i $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$ og $(0, 2)$.

b) $\int_\mathcal{C} x^2 y^3\, dx + x^3 y^2\, dy$ der $\mathcal{C}$ er omkretsen til trekanten med hjørner i $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 1)$

c) $\int_\mathcal{C} (x^2 y + y)\, dx + (xy + x)\, dy$ der $\mathcal{C}$ er omkretsen til trapeset med hjørner i $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ og $(0, 1)$

d) $\int_\mathcal{C} (x^2 y + xe^x)\, dx + (xy^3 + e^{\sin y})\, dy$ der $\mathcal{C}$ er omkretsen til området avgrenset av parabelen $y = x^2$ og linjestykket med endepunkter $(-1, 1)$ og $(2, 4)$.

2. Kurven $\mathcal{C}$ er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = t\sin(t)\,\mathbf{i} + (2\pi t - t^2)\,\mathbf{j}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Skisser kurven (f.eks. ved å bruke MATLAB) og regn ut arealet til området den avgrenser.

3. Kurven $\mathcal{C}$ er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \sin 2t\,\mathbf{i} + t\cos t\,\mathbf{j}, \qquad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Skisser kurven (f.eks. ved å bruke MATLAB) og regn ut arealet til området avgrenset av kurven.

4. Regn ut arealet avgrenset av kurven

$$\mathbf{r}(t) = a\cos^3 t\,\mathbf{i} + b\cos^3 t\,\mathbf{j}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

der a og b er to positive tall.

5. Regn ut $\iint_R x\; dxdy$ der R er området avgrenset av kurven

$$\mathbf{r}(t) = (t - t^2)\,\mathbf{i} + (t - t^3)\,\mathbf{j}, \qquad t \in [0, 1]$$

6. Regn ut $\iint_R y\; dxdy$ der R er området avgrenset av kurven

$$\mathbf{r}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}, \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

7. (Eksamen i MAT1110 13/6, 2005) La D være området i $\mathbb{R}^2$ som består av punkter (x, y) som oppfyller ulikhetene $x^2 + y^2 \leq 1$ og $y \geq 0$. La $\mathcal{C}$ være randen til D orientert mot urviseren. Finn verdien av kurveintegralet

$$\int_{\mathcal{C}} \big(xy + \ln(x^2 + 1)\big)\; dx + \big(4x + e^{y^2} + 3\arctan y\big)\; dy$$

8. (Eksamen i MAT1110 13/8, 2004) La D være det begrensede området i $\mathbb{R}^2$ som er avgrenset av parabelen $y = 1 - x^2$ og x-aksen. La $\mathcal{C}$ være den lukkede randkurven til D. Orienter $\mathcal{C}$ mot urviseren.

a) Regn ut kurveintegralet $I = \int_{\mathcal{C}} -y\,dx + x^2\,dy$ ved direkte utregning av kurveintegralet.

b) Regn ut I ved å beregne et dobbeltintegral $\iint_D f(x, y)\; dxdy$ av et passelig skalarfelt $f(x, y)$.

9. (Prøveeksamen i MAT1110, 2004) La D være området i $\mathbb{R}^2$ bestemt av ulikhetene $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $x \leq y \leq 2 - x^2$.

a) Sett opp et dobbeltintegral som har verdi lik arealet til D og regn ut verdien av dette dobbeltintegralet.

b) Beregn arealet av D ved å beregne linjeintegralet av et passelig vektorfelt langs randen til D.

10. (Eksamen i MAT1110 14/6, 2004).

a) La D være området av punkter (x, y) i $\mathbb{R}^2$ som oppfyller ulikhetene: $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $0 \leq y \leq x$. Lag en skisse av området og beregn dobbeltintegralet $I = \iint_D (x + y^2)\; dxdy$ ved å innføre polarkoordinater.

b) Beregn I ved å regne ut direkte et kurveintegral $\int_{\mathcal{C}} P\; dx + Q\; dy$ av et passelig vektorfelt $F = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ langs den stykkevis glatte kurven $\mathcal{C}$ som utgjør randen til D.

11. (Eksamen i MAT1110 13/6, 2007) R er rektanglet med hjørner i $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(1, 2)$, og $\mathcal{C}$ er omkretsen til R orientert mot klokken. Finn $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ der

$$\mathbf{F}(x, y) = (xy^2 - y)\,\mathbf{i} + (x^2 y + x)\,\mathbf{j}$$

12. (Kontinuasjonseksamen i MAT1110, 2006)

a) En ellipse har ligningen

$$9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y = 11$$

Finn sentrum og halvaksene til ellipsen, og lag en skisse av ellipsen i koordinatsystemet.

b) Vis at

$$\mathbf{r}(t) = (1 + 2\cos t)\,\mathbf{i} + (-2 + 3\sin t)\,\mathbf{j}, \qquad t \in [0, 2\pi)$$

er en parametrisering av ellipsen i a). Regn ut $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ der

$$\mathbf{F}(x, y) = y^2\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$$

og der $\mathcal{C}$ er ellipsen med positiv orientering.

c) Regn ut

$$\iint_R (1 - 2y)\, dxdy$$

der R er området avgrenset av ellipsen.

13. Det er en nær sammenheng mellom Greens teorem og teorien for konservative vektorfelt i seksjon 3.5. Bruk Greens teorem til å vise at dersom $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$ er et konservativt felt, så er $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ for alle enkle, lukkede, stykkevis glatte kurver $\mathcal{C}$.

Oppgaver til seksjon 6.6

1. Vis at dersom $A_1, A_2, \ldots, A_m$ er delmengder av $\mathbb{R}^n$ med innhold null, så har også $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ innhold null.

2. I denne oppgaven er A og B to delmengder av $\mathbb{R}^2$.

a) Vis at $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$ og $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cap \partial B$.

b) Vis at dersom A og B er Jordan-målbare, så er også $A \cup B$ og $A \cap B$ Jordan-målbare (du kan få bruk for resultatet i den forrige oppgaven).

3. Anta at $r : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig funksjon. Vis at mengden av alle punkter med polarkoordinater $(\theta, r(\theta))$ der $\theta \in [a, b]$ har innhold 0.

Oppgaver til seksjon 6.7

1. Løs dobbeltintegralene ved å bruke den angitte substitusjonen.

a) $\iint_A x^2\, dxdy$ der A er området avgrenset av linjene $y = x$, $y = x + 1$, $y = -x$, $y = -x + 2$. Sett $u = y - x$, $v = y + x$

b) $\iint_A x\, dxdy$ der A er parallellogrammet med hjørner $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(1, 1)$, $(4, 1)$. Sett $u = x - y$, $v = y$.

c) $\iint_A xy\, dxdy$ der A er området begrenset av linjene $y = \frac{x}{2}$, $y = \frac{x}{2} + 2$, $y = 2x$ og $y = 2x - 2$. Sett $u = y - \frac{x}{2}$, $v = y - 2x$.

2. Bruk MATLAB til å regne ut integralene i oppgave 1 uten å skifte variabel.

3. Løs dobbeltintegralet ved å bruke den angitte substitusjonen:

a) $\iint_R xy\, dxdy$ der R er området avgrenset av linjene $x + 2y = -1$, $x + 2y = 3$, $x = y + 1$, $x = y + 4$. Bruk substitusjonen $u = x + 2y$, $v = x - y$

b) $\iint_R (x^2 - y^2)e^{x+y}\, dxdy$ der R er kvadratet med hjørner (0,0), $(-1, 1), (1, 1), (0, 2)$. Sett $u = x + y$, $v = x - y$.

c) $\iint_R (y^2 - yx)\, dxdy$ der R er området avgrenset av linjene $y = x$, $y = 2x$ og kurvene $y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{1}{x}$. Sett $u = yx$, $v = \frac{y}{x}$.

4. Bruk MATLAB til å regne ut integralene i oppgave 3 uten å skifte variabel.

5. Regn ut dobbeltintegralene.

a) $\iint_A \frac{e^{x-y}}{x+y}\, dxdy$ der A er området avgrenset av linjene $y = x$, $y = x + 5$, $y = -x + 2$ og $y = -x + 4$.

b) $\iint_A xy\, dxdy$ der A er området avgrenset av linjene $y = x$, $y = 2x$ og kurvene $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{3}{x}$.

c) $\iint_A y\, dxdy$ der A er området avgrenset av linjene $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$ og kurvene $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{2}{x^2}$.

d) $\iint_A (3x - 2y)\, dxdy$ der A er parallellogrammet utspent av vektorene $(2, 1)$ og $(1, 3)$.

e) $\iint_A x\, dxdy$ der A er området avgrenset av parablene $y = x^2$, $y = x^2 + 4$, $y = (x - 1)^2$, $y = (x - 1)^2 + 4$.

6. Bruk MATLAB til å regne ut integralene i oppgave 5 uten å skifte variabel.

7. La A være parallellogrammet utspent av to vektorer $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ som ikke er parallelle, og la M være matrisen $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

a) Vis at avbildningen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{T}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ avbilder enhetskvadratet K utspent av $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ på A.

b) Vis at for alle kontinuerlige funksjoner f er

$$\iint_A f(x, y)\, dxdy = \det M \int_0^1 \int_0^1 f(au + cv, bu + dv)\, dudv$$

c) Regn ut $\iint_A e^{2x-3y}\, dxdy$ der A er parallellogrammet utspent av $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

8. (Eksamen i MAT1110 13/6, 2005)

a) Gitt koordinatskiftet $x = u\cos v$ og $y = 2u\sin v$. Beskriv linjen $y = 2x$ i koordinatene u og v. La R være området i første kvadrant av xy-planet som er begrenset av x-aksen, linjen $y = 2x$ og ellipsen $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. Finn arealet av R.

b) Finn arealet av flaten $z = x^2 + \frac{y^2}{2}$, $(x, y) \in R$ (der R er området beskrevet i a)).

9. (Eksamen i MAT1110 16/8, 2007) R er området i planet avgrenset av linjene $y = x$, $y = 2x$, $y = -x + 1$, $y = -x + 3$. Lag en skisse av R og regn ut dobbeltintegralet $\iint_R \frac{x+y}{x^2}\, dxdy$.

10. I denne oppgaven skal vi se nærmere på en påstand fremsatt i beviset for setning 6.7.6. Anta at Π er en partisjon av rektanglet $R = [a, b] \times [c, d]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d$$

der alle x'ene og y'ene er rasjonale tall. Vis at det finnes en partisjon $\hat{\Pi}$ som inneholder alle delepunktene x_i og y_j i Π, men der alle delrektanglene $\hat{R}_{ij}$ er kvadrater av samme størrelse. (*Hint:* Del opp $[a, b]$ og $[c, d]$ i delintervaller med lengde $\frac{1}{N}$ der N er fellesnevneren til alle brøkene $x_0, x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1 \ldots, y_m$.)

Oppgaver til seksjon 6.8

1. Regn ut $\iint_A e^{-x^2-y^2}\, dxdy$ der A er området i første kavadrant mellom x-aksen og linjen $y = x$.

2. Avgør om integralet $\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dxdy$ konvergerer eller divergerer.

3. Avgør om integralet $\iint_A x\, dxdy$ konvergerer når A er området i fjerde kvadrant mellom y-aksen funksjonsgrafen $y = \ln x$

4. Avgør om integralet $\iint_A xy\, dxdy$ konvergerer når A er området i første kvadrant under funksjonsgrafen $y = \frac{1}{x}$

5. Regn ut integralet $\iint_A \frac{x}{1+y^4}\, dxdy$ der A er området i første kvadrant som ligger over funksjonsgrafen $y = x^2$.

6. La $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$. Avgjør for hvilke verdier av p integralet $\iint_A \frac{1}{(x^2+y^2)^p}\, dxdy$ konvegerer, og regne ut verdien i disse tilfellene.

Oppgaver til seksjon 6.9

1. Beregn trippelintegralet:

a) $\displaystyle\iiint_A xyz\, dxdydz$ når $A = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

b) $\iiint_A (x + ye^z)\, dxdydz$ når $A = [-1, 1] \times [0, 1] \times [1, 2]$

c) $\iiint_A zy \cos(xy)\, dxdydz$ når $A = [1, 2] \times [\pi, 2\pi] \times [0, 1]$

d) $\iiint_A (x + y + z)\, dxdydz$ når $A = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$

e) $\iiint_A (\sqrt{y} - 3z)\, dxdydz$ når $A = [2, 3] \times [0, 1] \times [-1, 1]$

2. Beregn trippelintegralet:

a) $\iiint_A (xy + z)\, dxdydz$ når $A = \{(x, y, z)\colon 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2,$
$0 \leq z \leq x^2 y\}$

b) $\iiint_A z\ dxdydz$ når $A = \{(x, y, z)\colon 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\,,$
$-y^2 \leq z \leq xy\}$

c) $\iiint_A (x + y)z\ dxdydz$ når $A = \{(x, y, z)\colon 0 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq \sqrt{y}\,,$
$0 \leq z \leq 4\}$

d) $\iiint_A (3y^2 - 3z)\ dxdydz$ når A er området avgrenset av koordinatplanene
og planet $3x + 2y - z = 6$

e) $\iiint_A xy\ dxdydz$ når A er pyramiden med hjørner i $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$
$(0, 1, 0)$ og $(0, 0, 1)$.

3. Bruk MATLAB til å regne ut integralene i oppgave 1 (det kan ta tid!).

4. Bruk MATLAB til å regne ut integralene i oppgave 2 (det kan ta tid!).

5. Anta at R er en rektangulær boks, og at $f, g : R \to \mathbb{R}$ er kontinuerlige funksjoner. Vis at

(i) $\iiint_R kf(x)\ dxdydz = k \iiint_R f(x)\ dxdydz$ for alle konstanter k

(ii) $\iiint_R (f(x) + g(x))\ dxdydz = \iiint_R f(x)\ dxdydz + \iiint_R g(x)\ dxdydz$

(iii) $\iiint_R (f(x) - g(x))\ dxdydz = \iiint_R f(x)\ dxdydz - \iiint_R g(x)\ dxdydz$

Oppgaver til seksjon 6.10

1. Bruk sylinderkoordinater til å beregne:

a) $\iiint_A x\ dxdydz$ når $A = \{(x, y, z)\colon x, y \geq 0$ og $x^2 + y^2 \leq 9,$
og $0 \leq z \leq 2\}$

b) $\iiint_A xy\ dxdydz$ når $A = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 \leq 1$ og
$0 \leq z \leq 4 - x - y$

c) $\iiint_A z\sqrt{x^2 + y^2}\ dxdydz$ når $A = \{(x, y, z)\colon x^2 + (y - 1)^2 \geq 1$ og
$0 \leq z \leq 2\}$,

2. Bruk kulekoordinater til å beregne trippelintegralet:

a) $\iiint\limits_A (x^2+y^2)\,dxdydz$ når A er kulen om origo med radius 1

b) $\iiint\limits_A x\ dxdydz$ når $A = \{(x,y,z)\colon x,y \geq 0, z \geq \frac{1}{2}$ og $x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

c) $\iiint\limits_A 1\,dxdydz$ når $A = \{(x,y,z)\colon z^2 \leq x^2+y^2 \leq 1, 3y^2 \leq x^2, x \geq 0\}$

3. Regn ut trippelintegralet.

a) $\iiint_A z\ dxdydz$ der A er området over paraboloiden $z = x^2+y^2$ og under kuleflaten $x^2+y^2+z^2 = 2$.

b) $\iiint_A x\ dxdydz$ der $A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq z \leq 4\}$.

c) $\iiint_A e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ dxdydz$ der A er kulen med sentrum i origo og radius 1.

d) $\iiint_A \sqrt{x^2+y^2}\ dxdydz$ der A er området inni sylinderen $x^2+y^2 = 1$, mellom xy-planet og flaten $z = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$.

e) $\iiint_A (x^2+y^2)\ dxdydz$ der A er området begrenset av sylinderen $x^2-2x+y^2 = 1$ og planene $z=0$ og $z=2$.

f) $\iiint_A (x-3y+4z)\ dxdydz$ der A er parallellepipedet utspent av vektorene $(1,-1,0)$, $(2,0,3)$ og $(0,0,4)$.

4. La A være parallellepipedet utspent av tre vektorer $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ som ikke ligger i samme plan, og la M være matrisen $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

a) Vis at avbildningen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{T}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ avbilder enhetskuben K utspent av $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ og $\mathbf{e}_3$ på A.

b) Vis at for alle kontinuerlige funksjoner f er

$$\iiint_A f(x,y,z)\ dxdy =$$

$$= \det M \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(a_1u+b_1v+c_1w, a_2u+b_2v+c_2w, a_3u+b_3v+c_3w)\ dudvdw$$

c) Regn ut $\iint_A (2x-3z)\ dxdy$ der A er parallellogrammet utspent av $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. (Eksamen i MAT1110 14/6, 2004) La D være området som både ligger på innsiden av kjeglen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ og på innsiden av kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Beregn $\iiint_D z\, dxdydz$.

6. (Kontinuasjonseksamen i MAT1110 2006) Regn ut

$$\iiint_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz$$

der $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

7. La A være kulen med sentrum i origo og radius R, og anta at $a > R$. Vis at

$$\iiint_A \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}}\, dxdydz = \frac{4\pi R^3}{3a}$$

Dette resultatet er viktig i fysikk der det kan brukes til å vise at gravitasjonskraften fra en homogen kule er den samme som om all massen var samlet i sentrum.

8. En begrenset mengde $A \subset \mathbb{R}^3$ har *innhold null* dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en endelig samling $R_1, R_2, \ldots, R_n$ av rektangulære bokser med sider parallelle med koordinataksene slik at $A \subset R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_n$, og summen av volumene til $R_1, R_2, \ldots, R_n$ er mindre enn ϵ. Vis at hvis K er en lukket, begrenset delmengde av $\mathbb{R}^3$ og $f : K \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig, så har grafen til f innhold null.

Oppgaver til seksjon 6.11

1. Bruk et trippelintegral til å regne ut volumet til en kule med radius R.

2. Finn volumet til det området som ligger under grafen $z = e^{x+y}$ og over trekanten med hjørner i $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ og $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

3. Finn volumet av den delen av kulen $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ som ligger over kjegleflaten $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$.

4. Finn volumet til området som ligger inni både sylinderen $x^2 + y^2 = 1$ og kulen $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

5. Finn volumet til ellipsoiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ved å innføre nye variable $u = \frac{x}{a}, v = \frac{y}{b}, w = \frac{z}{c}$.

6. Finn massen til sylinderen $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, når tettheten er $f(x, y, z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)}$.

7. Finn massemiddelpunktet til området

$$A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$$

når tettheten er 1.

8. Vis at massemiddelpunktet til en homogen pyramide med hjørner i $(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ og $(0,0,c)$ er $\frac{1}{4}(a,b,c)$.

9. (Eksamen i MAT1110 13/6, 2005) La D være det begrensede området i $\mathbb{R}^3$ som er gitt ved ulikhetene $x^2+y^2 \leq z \leq \sqrt{2-x^2-y^2}$. Finn volumet av D.

10. (Eksamen i MAT1110 16/8, 2007) Finn volumet til området over xy-planet som ligger under kuleflaten $x^2+y^2+z^2=1$ og over kjegleflaten $z^2=3x^2+3y^2$

11. (Prøveeksamen i MAT1110 V-06) R er området i rommet avgrenset av flatene $z=6-x^2-y^2$ og $z=x^2-4x+y^2$.

a) Vis at integralet $I=\iiint_R y\,dxdydz$ er lik

$$\iint_S (6y-2x^2y-2y^3+4xy)\,dxdy$$

der $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2\leq 4\}$.

b) Regn ut integralet i a).

c) C er skjæringskurven mellom flatene $z=6-x^2-y^2$ og $z=x^2-4x+y^2$, og den er orientert mot klokken sett ovenfra. Vis at C har parametriseringen

$$\mathbf{r}(t)=(1+2\cos t)\,\mathbf{i}+2\sin t\,\mathbf{j}+(1-4\cos t)\,\mathbf{k}$$

og regn ut kurveintegralet $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ der $\mathbf{F}(x,y,z)=z\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+x\,\mathbf{k}$.

Fasit

Seksjon 6.1

1. a) 9, b) $\frac{\pi}{2}+2$, c) $\frac{2}{3}(e-1)$, d) $\frac{2}{\pi}$, e) $\frac{1}{8}\left(e^8-e^4-4\right)$, f) $2(e-1)$, g) $(1-\frac{2\sqrt{3}}{3})\ln 2+\frac{\pi}{6}$

Seksjon 6.2

1. a) $\frac{16}{5}$ b) $\frac{459}{4}$ c) $\frac{17}{12}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{e-1}{2}$ f) $\frac{3}{56}$ g) $-\frac{3\pi}{2}$ h) $\frac{\pi^2}{8}$ i) $-\frac{e^2}{12}+\frac{e}{6}+\frac{5}{12}$

3. a) $\frac{e-1}{2}$ b) 1 c) $\frac{e-1}{3}$

Seksjon 6.3

1. a) $\frac{81}{5}$ b) $\frac{625}{16}\pi$ c) $\pi(e^{16}-e)$ d) $\frac{1}{16}$ e) 0 f) $\frac{\pi}{6}(2\sqrt{2}-1)$ g) $\frac{512}{75}$

3. b) $\frac{32}{9}$

4. $\frac{\pi}{8}$

Seksjon 6.4

1. a) $\frac{8}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) 12 d) $\frac{128\sqrt{2}}{3}\pi$ e) 0 f) 8π

2. $\bar{x} = \frac{3}{4}, \bar{y} = \frac{3}{8}$

3. $\bar{x} = \frac{4}{7}, \bar{y} = \frac{3}{4}$

4. $4\pi R^2$

5. $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1)$

6. $\sqrt{2}\pi$.

7. $\pi - 2$

9. $\frac{\pi}{120}(25\sqrt{5} + 1)$

10. $\frac{4}{3}$

11. $270\pi^2$

12. 20π

13. $R^2 \sin\phi$, $\frac{\pi R^2}{8}$

14. $\sqrt{2}u$, $\frac{31\sqrt{2}\pi}{5}$

15. $(0, 0, \frac{1}{2})$

16. a) $\frac{16}{9}(3\pi - 4)$, b) $8\pi - 16$

17. a) $\frac{7\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$

18. $\frac{81\pi}{2}$

19. b) 8π c) -24π

Seksjon 6.5

1. a) 4 b) 0, c) $\frac{7}{12}$, d) $\frac{135}{4}$

2. $4\pi^2$

3. $\frac{10-3\pi}{9}$

4. $\frac{3\pi ab}{8}$

5. $\frac{1}{420}$

6. $4\pi^3 - 24\pi$

7. 2π

8. a) $\frac{4}{3}$.

9. a) og b) $\frac{7}{6}$

10. a) og b) $\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\pi}{32} - \frac{1}{16}$

11. 4

12. a) Sentrum $(1, -2)$, halvakser $a = 2$, $b = 3$ b) 30π c) 30π

Seksjon 6.7

1.a) $\frac{1}{6}$ b) 6 c) $\frac{560}{81}$

3. a) $-\frac{110}{27}$, b) $e^2 + 1$, c) $-\frac{3}{4}\ln 2 + \frac{3}{4}$

5. a) $\frac{\ln 2}{2}(1 - e^{-5})$ b) $2\ln 2$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{5}{2}$ e) 20

7. c) $\frac{1}{7}(e^7 + e^{-7} - 2)$

8. a) Beskrivelse av linjen: $u = 0$ eller $v = \frac{\pi}{4} + k\pi$, der $k \in \mathbb{Z}$, Areal $= \frac{\pi}{4}$
b) $\frac{\pi}{24}(5\sqrt{5} - 1)$

9. 2

Seksjon 6.8

1. $\frac{\pi}{8}$

2. Divergerer

3. Konvergerer mot $\frac{1}{4}$

4. Divergerer

5. $\frac{\pi}{8}$

6. Konvergens for $p > 1$ mot $\frac{\pi}{p-1}$

Seksjon 6.9

1. a) $\frac{1}{8}$ b) $e^2 - e$ c) 1 d) 18 e) $\frac{4}{3}$

2. a) $\frac{14}{15}$ b)$\frac{344\sqrt{2}}{945}$ c) $\frac{672}{5}$ d) $-\frac{216}{5}$ e) $\frac{1}{120}$

Seksjon 6.10

1. a) 18 b) 0 c) $\frac{64}{9}$

2. a) $\frac{8}{15}\pi$ b) $-\frac{3\sqrt{3}}{64} + \frac{\pi}{24}$ c) $\frac{\pi^2}{4}$

3. a) $\frac{7\pi}{12}$ b) 0 c) $8\pi(1 - \frac{5}{e})$ d) $\frac{\pi}{3}$ e) 3π f) 136

4. c) 9

5. $\frac{\pi}{8}$
.

6. $4\pi^2$

Seksjon 6.11

1. $\frac{4}{3}\pi R^3$

2. $\frac{1}{2}$

3. $\frac{\pi R^3}{3}$

4. $\frac{4\pi}{3}(8 - 3\sqrt{3})$

5. $\frac{4\pi abc}{3}$

6. $\frac{\pi^2}{2} + \pi \ln 2$

7. $(0, 0, \frac{8}{3})$

9. $\frac{\pi}{3}(2 - \sqrt{3})$

11. b) 0 c) 0