MAT 1110: Obligatorisk oppgave 2, V-08

Innlevering: *Senest fredag 25. april, 2008, kl.14.30, på Ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt (7. etasje NHA). Erfaringsmessig blir det lange køer både ved skriverne og utenfor ekspedisjonskontoret rett før innleveringsfristen, så det er smart å levere tidligere.* **Husk obligforside!** *Se forøvrig*

http://www.math.uio.no/academics/obligregler.shtml

for nærmer informasjon om regler for obligatoriske oppgaver. Husk spesielt å søke om utsettelse til studieinfo@math.uio.no *før innleveringsfristen dersom du blir syk!*

Instruksjoner: *Oppgaven er obligatorisk, og studenter som ikke får besvarelsen godkjent, vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. For å få besvarelsen godkjent, må man ha minst 60% score, og det vil bli lagt vekt på at man har en klar og ryddig besvarelse med gode begrunnelser. Det vil også bli lagt vekt på at MATLAB-delen av oppgavene er rimelig godt besvart — besvarelser som røper mangelfulle MATLAB-ferdigheter, kan bli underkjent selv om de har en score på mer enn 60%. De grunnleggende MATLAB-ferdighetene som testes i dette oppgavesettet, er programmering, grafisk fremstilling og bruk av enkle kommandoer fra lineær algebra.*

Alle delspørsmål a), b) osv. teller like mye. Du kan få poeng på et delspørsmål selv om du ikke er kommet frem til et svar, og det er derfor viktig at du leverer inn alt det du har kommet frem til. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse.

Det er lov å samarbeide og å bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen skal imidlertid være skrevet av deg *og gjenspeile* din *forståelse av stoffet. Du skal selv ha gjennomført alle MATLAB-kjøringer. Er vi i tvil om at du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.*

Alle svar skal begrunnes. Der oppgaven krever at du skal bruke MATLAB, må du legge ved utskrifter av m-filer og figurer. Du må også redegjøre for hvilke andre kommandoer og rutiner du har brukt, f.eks. ved å legge ved en dagbokfil ("diary") med kommentarer.

Settet består av tre oppgaver med en indre sammenheng. Det er mulig å gjøre oppgave 1 og oppgave 2 uavhengig av de andre oppgavene, men oppgave 3 bygger både på 1 og 2. Oppgavesettet er selvforklarende, og det er godt mulig å begynne på oppgavene med en gang de blir lagt ut. Det finnes imidlertid teori og eksempler i seksjon 4.10 og 4.11 i *Flervariabel analyse med lineær algebra* som kan være til hjelp dersom man står fast.

Oppgave 1: To dyreslag, et byttedyr og et rovdyr, lever i det samme området. Dersom det ett år er x_n byttedyr og y_n rovdyr i området, regner man at antall dyr året etter er gitt ved

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1.2x_n - 0.15y_n \\ y_{n+1} &= 0.1x_n + 0.95y_n \end{aligned}$$

a) Lag et MATLAB-program som beregner utviklingen av bestandene. Programmet skal ha tre input-variable a, b og N der $a = x_1$ (dvs. startbestanden av byttedyr), $b = y_1$ (dvs. startbestanden av rovdyr) og N er antall år man ønsker å beregne fremover.

b) Kjør programmet ditt med startverdier $x_1 = 200$, $y_1 = 100$ og bruk $N = 15$. Lag en MATLAB-figur som viser hvordan begge bestandene utvikler seg.

c) Gjenta punkt b) med startverdiene $x_1 = 100$, $y_1 = 200$. Forklar at bestandene nå dør ut.

d) Kjør programmet med startverdier $x_1 = 95$, $y_1 = 105$. Velg N så stor at du ser at bestandene dør ut.

e) Eksperimenter med litt forskjellige startverdier. Har du noen hypotese om hvilke startverdier som fører til at bestandene dør ut, og hvilke som fører til at de fortsetter evig?

Oppgave 2: Hvis A er en $n \times n$-matrise og $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, kalles $\mathbf{v}$ en *egenvektor* for A dersom $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ for et tall λ. Tallet λ kalles *egenverdien* til $\mathbf{v}$. I MATLAB kan du bruke kommandoen `eig` til å finne egenvektorer og egenverdier. Har du lastet inn en matrise A, vil kommandoen

```
>> [U,V]=eig(A)
```

produsere to matriser U og V der søylene i U er egenvektorer til A, og der diagonalelementene i V er de tilhørende egenverdiene.

a) Vis at dersom $\mathbf{v}$ er en egenvektor med egenverdi λ, så er $A^k\mathbf{v} = \lambda^k\mathbf{v}$ for alle $k \in \mathbb{N}$.

b) Bruk MATLAB til å finne egenvektorene og egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1.2 & -0.15 \\ 0.1 & 0.95 \end{pmatrix}$$

c) Sjekk for hånd at $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er egenvektorer for A. Hva er de tilhørende egenverdiene, og hva er sammenhengen mellom disse egenvektorene og de du fant i b)?

d) Vis at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ danner en basis for $\mathbb{R}^2$ (du kan bruke MATLAB hvis du vil).

e) Anta at $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ er en generell vektor i $\mathbb{R}^2$. Finn z og u (uttrykt ved a og b) slik at

$$\mathbf{w} = z\mathbf{v}_1 + u\mathbf{v}_2$$

Oppgave 3: Vi lar x_n og y_n være som i oppgave 1 og A som i oppgave 2. Dessuten setter vi $\mathbf{r}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

a) Vis at $\mathbf{r}_{n+1} = A\mathbf{r}_n$. Vis også at $\mathbf{r}_n = A^{n-1}\mathbf{r}_1$

b) La $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Anta at z og u er tall slik at $\mathbf{r}_1 = z\mathbf{v}_1 + u\mathbf{v}_2$, der $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ er egenvektorene fra oppgave 2. Vis at

$$\mathbf{r}_n = z\lambda_1^{n-1}\mathbf{v}_1 + u\lambda_2^{n-1}\mathbf{v}_2$$

der λ_1 og λ_2 er egenverdiene til $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$.

c) Vis at

$$\begin{aligned} x_n &= 3(a-b) \cdot 1.1^{n-1} - (2a-3b) \cdot 1.05^{n-1} \\ y_n &= 2(a-b) \cdot 1.1^{n-1} - (2a-3b) \cdot 1.05^{n-1} \end{aligned}$$

I resten av oppgaven antar vi at $x_1 > 0$ og $y_1 > 0$ (vi kan ikke ha et negativt antall dyr!).

d) Vis at dersom $a < b$, vil dyrebestandene dø ut (dvs. at x_n og y_n blir negative når n blir stor nok).

e) Vis at dersom $a \geq b$, så er følgene $\{x\}_n$ og $\{y_n\}$ voksende, og bestandene dør aldri ut.

LYKKE TIL!