Oppgaver og fasit til kapittel 5

Oppgaver til seksjon 5.1

1. Avgjør om mengden er åpen eller lukket eller ingen av delene. Det holder med en figur og et uformelt argument.

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \text{ og } |y| \leq 1\}$

b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1 \text{ og } |y| < 1\}$

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \text{ og } |y| < 1\}$

d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$

e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y < 1\}$

f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 1\}$

g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \text{ og } y \text{ er rasjonale}\}$

h) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$

i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$

2. Finn grensen til følgene $\{\mathbf{x}_n\}$ når:

a) $\mathbf{x}_n = (\frac{2n^2+1}{n^2+3n}, \frac{3n}{1-2n})$.

b) $\mathbf{x}_n = (n \sin \frac{1}{n}, n(1 - e^{2/n}))$.

c) $\mathbf{x}_n = (\sqrt{n^2 + 2n} - n, \cos \frac{1}{n}, \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^2})$

3. Bruk setning 5.1.5 og grensesetningene for "vanlige" følger (dvs. følger med verdier i $\mathbb{R}$) til å bevise setning 5.1.4.

4. Anta at $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er to punkter i $\mathbb{R}^m$, og at $\{\mathbf{x}_n\}$ er en følge som konvergere mot $\mathbf{b}$. Vis at $\lim_{n\to\infty} |\mathbf{x}_n - \mathbf{a}| = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$. (*Hint:* Vis først at $||\mathbf{x}_n - \mathbf{a}| - |\mathbf{b} - \mathbf{a}|| \leq |\mathbf{x}_n - \mathbf{b}|$).

5. Vis at den åpne kulen $B(\mathbf{a}, r)$ er en åpen mengde og at den lukkede kulen $\overline{B}(\mathbf{a}, r)$ er en lukket mengde.

6. Vis at dersom $\mathbf{c}$ er et randpunkt for $A \subset \mathbb{R}^m$, så finnes det to følger $\{\mathbf{x}_n\}$ og $\{\mathbf{y}_n\}$ som konvergerer mot $\mathbf{c}$ slik at den ene følgen bare består av punkter som er med i A, mens den andre følgen bare består av punkter som ikke er med i A.

7. I denne oppgaven skal vi se litt på egenskapene til de åpne mengdene.

a) Anta at $A, B \subset \mathbb{R}^m$ er åpne mengder. Vis at $A \cup B$ og $A \cap B$ er åpne mengder. (Husk at $A \cup B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{x}$ er med i minst én av mengdene A og $B\}$ og $A \cap B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{x}$ er med i begge mengdene A og $B\}$.)

b) Hvis $A \subset \mathbb{R}^m$, så kalles mengden

$$A^c = \{x \in \mathbb{R}^m : x \notin A\}$$

komplementet til A. Vis at A og A^c har samme rand.

c) Vis at en mengde $A \subset \mathbb{R}^m$ er åpen hvis og bare hvis komplementet A^c er lukket.

8. I denne oppgaven skal vi se litt på egenskapene til de lukkede mengdene. Det er lurt å gjøre oppgaven ovenfor før du begynner på denne.

a) Anta at $A, B \in \mathbb{R}^m$ er lukkede mengder. Vis at $A \cup B$ og $A \cap B$ er lukkede mengder.

b) Anta at $A \subset \mathbb{R}^m$ er lukket og at $B \subset \mathbb{R}^m$ er åpen. Vis at

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$$

er lukket.

c) Vis at $A \subset \mathbb{R}^m$ er lukket hvis og bare hvis $A = \overline{A}$, der *tillukningen* $\overline{A}$ består av alle punkter som er med i enten A eller randen til A (dvs. $\overline{A} = A \cup \partial A$ der ∂A er randen til A).

Oppgaver til seksjon 5.2

1. Bevis setning 5.2.2.

2. Bevis setning 5.2.3 for følger i et vilkårlig rom $\mathbb{R}^m$.

3. Anta I_n er en følge av intervaller i $\mathbb{R}$ slik at $I_{n+1} \subset I_n$ og lengden til I_n går mot null. Vis at det finnes nøyaktig ett tall som er med i alle intervallene I_n.

4. Anta at $\{\mathbf{x}_n\}$ er en følge i $\mathbb{R}^m$. Et punkt $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^m$ kalles et *opphopningspunkt* for $\{\mathbf{x}_n\}$ hvis enhver kule $B(\mathbf{x}, r)$ inneholder uendelig mange elementer i følgen.

a) Vis at $\mathbf{x}$ et et opphopningpunkt for $\{\mathbf{x}_n\}$ hvis og bare hvis $\{\mathbf{x}_n\}$ har en delfølge som konvergerer mot $\mathbf{x}$

b) Anta at A er en lukket, begrenset delmengde av $\mathbb{R}^m$. Vis at enhver følge i A har et opphopningspunkt i A.

c) Anta at $A \subset \mathbb{R}^m$ ikke er lukket. Vis at det finnes en følge i A som *ikke* har et opphopningspunkt i A.

d) Anta at $A \subset \mathbb{R}^m$ ikke er begrenset. Vis at det finnes en følge i A som *ikke* har et opphopningspunkt i A.

5. Anta at $\mathbf{a}$ er et punkt i $\mathbb{R}^m$ og at B er en delmengde i $\mathbb{R}^m$. Vi definerer *avstanden fra* $\mathbf{a}$ *til* B til å være

$$\mathrm{d}(\mathbf{a}, B) = \inf\{|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \, : \, \mathbf{b} \in B\}$$

a) La $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x > 1\}$. Vis at $\mathrm{d}(\mathbf{0}, B) = 1$, men at det ikke finnes noe punkt $\mathbf{b} \in B$ slik at $|\mathbf{0} - \mathbf{b}| = 1$.

b) Vis at dersom $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ og B er en lukket, begrenset delmengde av $\mathbb{R}^m$, så finnes det et punkt $\mathbf{b} \in B$ slik at $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \mathrm{d}(\mathbf{a}, B)$. Vis ved et eksempel at det godt kan være flere slike punkter $\mathbf{b}$.

c) Vis at dersom $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ og B er en lukket (men ikke nødvendigvis begrenset) delmengde av $\mathbb{R}^m$, så finnes det et punkt $\mathbf{b} \in B$ slik at $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \mathrm{d}(\mathbf{a}, B)$.

d) Mengden B kalles *konveks* dersom den har følgende egenskap: Dersom $\mathbf{c}$ og $\mathbf{d}$ er to punkter i B, så ligger også hele linjestykket som forbinder $\mathbf{c}$ og $\mathbf{d}$ i B (du finner en illustrasjon i seksjon 5.4 i heftet). Vis at dersom B er en lukket, konveks delmengde av $\mathbb{R}^m$, så finnes det et *entydig* punkt $\mathbf{b} \in B$ slik at $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \mathrm{d}(\mathbf{a}, B)$.

6. Vis at for alle inverterbare $m \times m$-matriser A er $|A^{-1}|^{-1} \leq |A|$.

7. Anta at A er en inverterbar $m \times m$-matrise og at $\{A_n\}$ er en følge av $m \times m$-matriser som konvergerer mot A. Vis at A_n er inverterbar for alle tilstrekkelig store n og at $\{A_n^{-1}\}$ konvergerer mot A^{-1}.

Oppgaver til seksjon 5.3

1. En følge $\{x_n, y_n\}$ i $\mathbb{R}^2$ er gitt ved $x_1 = y_1 = 0$ og

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 0.6x_n - 0.6y_n + 0.2 \\ y_{n+1} &= 0.6x_n + 0.6y_n + 1 \end{aligned}$$

Skriv et MATLAB-program som beregner elementer i følgen, og tegn dem inn i en figur. Vis at funksjonen

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 0.6x - 0.6y + 0,2 \\ 0.6x + 0.6y + 1 \end{pmatrix}$$

har et fikspunkt.

2. To dyreslag lever i det samme området. Dersom det er hhv. x_n og y_n dyr av hvert slag i området ett år, regner man at tallene året etter er gitt ved

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 0.9x_n + 0.01y_n - 10 \\ y_{n+1} &= -1.01x_n + y_n + 300 \end{aligned}$$

Skriv et MATLAB-program som beregner hvordan bestanden utvikler seg, og plott resultatet når $x_1 = 20$, $y_1 = 2000$. Finn et likevektspunkt for bestandene.

3. I denne oppgaven skal vi se på befolkningsutviklingen i to land. Dersom innbyggertallet (målt i millioner) i de to landene er hhv. x_n og y_n ett tiår, regner man at de tilsvarende tallene ti år etter er gitt ved

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1.1x_n + 0.001y_n - 0.5 \\ y_{n+1} &= 0.95y_n + 0.002x_n + 0.2 \end{aligned}$$

Skriv et MATLAB-program som beregner hvordan innbyggertallene utvikler seg, og plott resultatet når $x_1 = 50$, $y_1 = 8$.

4. To bensinstasjoner X og Y konkurrerer ved å tilpasse seg hverandres priser. Dersom prisene en uke er hhv. x_n og y_n, vil stasjon X uken etter sette sin pris til $1.01 \cdot \frac{x_n + y_n}{2}$, mens stasjon Y vil velge den prisen som er lavest av x_n og $1.1y_n$. Lag et MATLAB-program som viser hvordan prisene vil utvikle seg. Kjør programmet både med $x_1 = 8, y_1 = 12$ og med $x_1 = 12, y_1 = 8$. Sammenlign prisutviklingene.

5. To insektstyper konkurrerer om det samme området. Anta at x_n og y_n er antall insekter (målt i millioner) i området i år n. Vi regner at bestanden i år $n + 1$ da er gitt ved

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2.2x_n(1 - x_n) + 0.01x_n y_n \\ y_{n+1} &= 3.1y_n(1 - y_v) - 0.02x_n y_n \end{aligned}$$

Skriv et MATLAB-program som beregner hvordan bestandene utvikler seg, og plott resultatet når $x_1 = 0.5$, $y_1 = 0.5$ og når $x_1 = 0.1$, $y_1 = 0.8$. Eksperimenter også med andre startverdier i intervallet $(0, 1)$.

6. To firmaer konkurrerer i det samme markedet. Dersom prisene på produktet deres (målt i tusen kroner) er hhv. p og q, regner firmaene med å selge hhv.

$$E_1(p, q) = 1000e^{-\frac{p}{q}-\alpha(p+q)}$$

og

$$E_2(p, q) = 1000e^{-\frac{q}{p}-\beta(p+q)}$$

eksemplarer, der α og β er konstanter.

a) Anta at prisen q ligger fast. Vis at firma 1 da får størst salgsinntekter ved å selge sitt produkt for $p^* = \frac{q}{1+\alpha q}$. Vis tilsvarende at hvis p ligger fast, så får firma 2 størst salgsinntekter ved å selge sitt produkt for $q^* = \frac{p}{1+\beta p}$.

b) Det første året velger firmaene prisene p_1 og q_1. De bestemmer seg for at prisen året etter skal være hhv. $p_2 = 1.1p_1^* = 1.1\frac{q_1}{1+\alpha q_1}$ og $q_2 = 1.1q_1^* = 1.1\frac{p_1}{1+\beta p_1}$. Denne politikken holder de fast ved i årene som kommer. Skriv et MATLAB-program som beregner prisutviklingen for de to produktene. Parametrene α og β skal inngå blant input-variablene.

c) Kjør programmet med $\alpha = \beta = 0.05$. Bruk startverdiene $(x_1, y_1) = (3, 4)$, $(x_1, y_1) = (4, 3)$, $(x_1, y_1) = (1, 1.3)$, $(x_1, y_1) = (1.3, 1)$ og sammenlign resultatene.

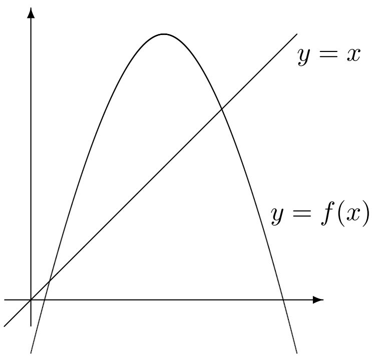
d) Gjenta punkt c) med $\alpha = 0.05, \beta = 0.02$.

7. La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være funksjonen $f(x) = x^2 + x - 2$. Vis at $\bar{x} = \sqrt{2}$ er et fikspunkt for f. Skriv et MATLAB-program som utfører iterasjonen $x_{n+1} = f(x_n)$. Start programmet med $x_1 = \sqrt{2}$. Hva skjer (du bør nok utføre ca. 30 iterasjoner før du ser noe)? Forklar!

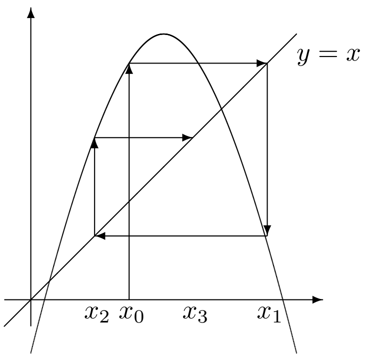
8. Skriv et MATLAB-program for iterasjon av funksjoner $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = b \sin x$, der b er en konstant. Eksperimenter med forskjellige startverdier og forskjellige b-verdier slik vi gjorde med funksjonen $f(x) = bx(1 - x)$ i teksten.

9. I denne oppgavn skal vi se på en grafisk metode for å studere iterasjon av en kontinuerlig funksjon f av én variabel. I figuren nedenfor har vi tegnet opp funksjonsgrafen og linjen $y = x$ i samme koordinatsystem.

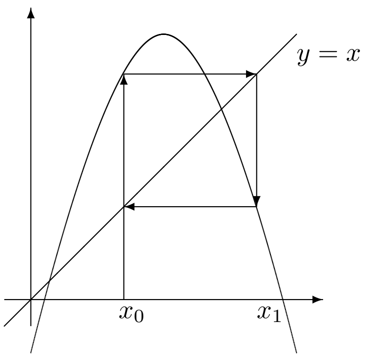
a) Forklar at fikspunktene til f er det samme som skjæringspunktene mellom linjen $y = x$ og grafen til f.



b) Den neste figuren viser hvordan vi grafisk kan finne punktene $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2)$ osv. Forklar hvordan og hvorfor metoden virker.



c) Den neste figuren viser en bane med periode 2. Lag en tilsvarende figur som viser en bane med periode 3 (du kan godt bruke en annen funksjonsgraf $y = f(x)$).



d) I resten av oppgaven skal vi se på funksjoner $f : [0,1] \to [0,1]$ gitt ved $f(x) = bx(1-x)$, der $0 \le b \le 4$. Vis at dersom $b > 1$, så har f to fikspunkter 0 og $1 - \frac{1}{b}$.

e) Velg $b = \frac{7}{2}$. Vis at banen som starter i $x_0 = \frac{3}{7}$ er periodisk med periode 2.

f) Bruk MATLAB eller en lommeregner til å tegne grafen til $f^{\circ 2}$. Vis at grafen skjærer linjen $y = x$ i punktene 0, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$ og $\frac{6}{7}$. Forklar.

g) (arbeidskrevende) Vis at dersom $3 < b \leq 4$, så har funksjonen $f(x) = bx(1-x)$ baner med periode to som starter i punktene $\frac{b+1\pm\sqrt{(b-1)^2-4}}{2b}$.

Oppgaver til seksjon 5.4

1. (Fra oblig 2 i MAT1110, V-07) I denne oppgaven skal vi se på iterasjon av funksjonen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{1}{2}\sin(x + y), \frac{1}{2}\cos(x - y)\right)$$

a) Lag et MATLAB-program for å beregne følger $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_n)$.

b) Kjør programmet ditt med startpunkt $\mathbf{u}_1 = (x_1, y_1) = (1, -1)$ og et passende antall iterasjoner. La MATLAB tegne følgen $\{\mathbf{u}_n\}$.

c) Kjør programmet 6 ganger til. I hvert tilfelle lar du MATLAB velge et tilfeldig startpunkt (x_1, y_1) med $-2.5 \leq x_1, y_1 \leq 2.5$. Tegn opp sekvensene i hvert sitt subplot, og sett aksene slik at resultatene er lette å sammenligne.

2. La $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ være en kontinuerlig funksjon. Vis at dersom det finnes en følge $\{\mathbf{u}_n\}$ der $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_n)$ som konvergerer mot $\mathbf{u}$, så er $\mathbf{u}$ et fikspunkt for $\mathbf{F}$.

3. Vis at enhver kontinuerlig funksjon $f : [0, 1] \to [0, 1]$ har et fikspunkt.

4. Du står midt i et landskap og holder et kart over det samme området vannrett foran deg. Forklar at det finnes ett punkt på kartet som ligger loddrett over det tilsvarende punktet i landskapet.

5. I denne oppgaven skal vi vise følgende generalisering av Banachs fikspunktteorem:

Teorem *Anta at A er en ikke-tom, lukket delmengde av $\mathbb{R}^m$, og at $\mathbf{F} : A \to A$ er funksjon slik at $\mathbf{F}^{\circ k}$ er en kontraksjon for en $k \in \mathbb{N}$. Da har $\mathbf{F}$ nøyaktig ett fikspunkt $\mathbf{x}$ i A.*

Vi skal gjennomføre beviset i to skritt:

a) Vis at ethvert fikspunkt for $\mathbf{F}$ også er et fikspunkt for $\mathbf{F}^{\circ k}$. Forklar at dette medfører at $\mathbf{F}$ kan ha høyst ett fikspunkt.

b) Ifølge Banachs fikspunktteorem har $\mathbf{F}^{\circ k}$ et fikspunkt $\mathbf{x}$. Vis at $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ også er et fikspunkt for $\mathbf{F}^{\circ k}$. Fullfør beviset for teoremet.

c) La $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = (2y + 1, \frac{x}{3} + 1)$. Vis at $\mathbf{F}$ ikke er en kontraksjon, men at $\mathbf{F}^{\circ 2}$ er det. Finn fikspunktet til $\mathbf{F}$.

6. (Fra oblig 1 i MAT1110, V-07) I denne oppgaven skal vi eksperimentere med en annen type "fikspunkter". Disse "fikspunktene" er *mengder* som ikke forandrer seg når vi anvender en sammensetning av funksjoner på dem.

Vi starter med funksjonene $\mathbf{T}_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{T}_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ og $\mathbf{T}_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved $\mathbf{T}_1(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$, $\mathbf{T}_2(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2}\right)$ og $\mathbf{T}_3(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

a) La S være den likesidede trekanten med hjørner i punktene $(0,0)$, $(1,0)$ og $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Beskriv bildene $\mathbf{T}_1(S)$, $\mathbf{T}_2(S)$ og $\mathbf{T}_3(S)$ av S under henholdsvis $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ og $\mathbf{T}_3$ (husk at generelt er $\mathbf{T}(S) = \{\mathbf{T}(x,y) \mid (x,y) \in S\}$).

b) La S_1 være det samlede bildet av S under $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ og $\mathbf{T}_3$ (vi har altså $S_1 = \mathbf{T}_1(S) \cup \mathbf{T}_2(S) \cup \mathbf{T}_3(S)$). Beskriv bildet S_2 av S_1 under $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ og $\mathbf{T}_3$ (vi har altså $S_2 = \mathbf{T}_1(S_1) \cup \mathbf{T}_2(S_1) \cup \mathbf{T}_3(S_1)$). Lag en skisse av S_1 og S_2. Hvordan tror du S_3 og S_4 blir seende ut? Hvordan går det når du tegner inn S_n for alle n? Mengden A vi da får kalles *Sierpinski-trekanten*, og den er et slags fikspunkt i den forstand at den ikke endrer seg når vi bruker $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ og $\mathbf{T}_3$ på den (dvs. at $A = \mathbf{T}_1(A) \cup \mathbf{T}_2(A) \cup \mathbf{T}_3(A)$).

Vi skal nå se på følgende prosedyre: Start med et punkt (x_1, y_1) i planet. Velg tilfeldig én av funksjonen $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3$, og la (x_2, y_2) være det punktet vi får når vi bruker denne funksjonen på (x_1, y_1). Velg på ny én av funksjonen $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3$ på en tilfeldig måte, og la (x_3, y_3) være det punktet vi får når vi bruker denne funksjonen på (x_2, y_2). Fortsetter vi på denne måten, får vi en følge av punkter $\{(x_n, y_n)\}$ i planet. Det viser seg at denne følgen alltid hoper seg opp på den samme mengden. Vi skal undersøke dette fenomenet nærmere.

c) Forklar at følgende MATLAB-program er en implementering av prosedyren ovenfor.

```
function [x,y]=Sierpinski(a,b,N)
x(1)=a;
y(1)=b;
for n=1:N
z=rand;
if z<=1/3
x(n+1)=x(n)/2;
y(n+1)=y(n)/2;
elseif z<=2/3
x(n+1)=x(n)/2+1/2;
y(n+1)=y(n)/2;
else
x(n+1)=x(n)/2+1/4;
y(n+1)=y(n)/2+sqrt(3)/4;
end
end
plot(x,y,'.')
```

Du må sannsynligvis bruke MATLABs hjelpefunksjon for å finne ut av noen av kommandoene.

d) Legg programmet ovenfor på en m-fil og kjør det med forskjellige inputverdier a, b og N. Beskriv det du ser. Velg noen av kjøringene, og presenter dem i samme figur ved hjelp av kommandoen `subplot`. (*Hint:* Du bør velge N opp til størrelsesorden 10 000 for å få et godt bilde, men det er lærerikt også å se på mindre verdier av N. Det kan også være lurt å bruke kommandoen `axis('equal')` før du lagrer bildene.)

e) Undersøk også hvordan programmet nedenfor fungerer (rett opp figurene med `axis('equal')`).

```
function [x,y]=blomst(r,d,s,N)
x(1)=1;
y(1)=0;
for n=1:N
z=rand;
if z<=0.95
x(n+1)=r*(x(n)*cos(pi/d)-y(n)*sin(pi/d));
y(n+1)=r*(x(n)*sin(pi/d)+y(n)*cos(pi/d));
elseif z>.95
x(n+1)=s*x(n)+1;
y(n+1)=s*y(n);
end
end
plot(x,y,'.')
```

Kjør programmet først med $r = 0.97, d = 7, s = \frac{1}{6}, N = 10\,000$, men eksperimenter også med andre verdier. Bruk de to funksjonene $\mathbf{F}_1(x, y) = r(x \cos \frac{\pi}{d} - y \sin \frac{\pi}{d}, x \sin \frac{\pi}{d} + y \cos \frac{\pi}{d})$ og $\mathbf{F}_2(x, y) = (sx + 1, sy)$ til å forklare hvordan bildene fremkommer.(*Hint:* I en "typisk" kjøring vil man velge $\mathbf{F}_1$ mange ganger før $\mathbf{F}_2$ dukker opp første gang. Deretter kommer sannsynligvis en ny sekvens av $\mathbf{F}_1$'ere osv. Prøv å knytte dette bildet til de geometriske tolkningene av $\mathbf{F}_1$ og $\mathbf{F}_2$.)

Oppgaver til seksjon 5.5

1. La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være funksjonen $f(x) = x^3 - x$.

a) Vis at f har tre nullpunkter.

b) Skriv et MATLAB-program for å finne nullpunktene til f ved hjelp av Newtons metode.

c) Kjør programmet ditt med startverdier 0.4, 0.5 og 0.6. Prøv å gjette hva som skjer før du kjører programmet.

d) Prøv å forklare resultatene i c) geometrisk ved å studere hvordan Newtons metode virker.

2. Funksjonen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

a) Skriv et MATLAB-program for å finne nullpunktene til $\mathbf{F}$ ved hjelp av Newtons metode.

b) $\mathbf{F}$ har to nullpunkter. Finn begge to ved å velge forskjellige startverdier.

c) Finn nullpunktene til $\mathbf{F}$ ved regning og sjekk at svarene stemmer med det du fant i b).

3. Funksjonen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(x+y) \\ \\ \frac{1}{2}\cos(x-y) \end{pmatrix}$$

a) Beskriv de (uendelig mange) nullpunktene til $\mathbf{F}$.

b) Skriv et MATLAB-program for å finne nullpunktene til $\mathbf{F}$ ved hjelp av Newtons metode.

c) Eksperimenter med forskjellige startverdier og se hvordan Newtons metode finner frem til forskjellige nullpunkter.

4. Funksjonen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 - x - 3 \\ x^2 - y + \sin(x-y) - 2 \end{pmatrix}$$

Skriv et MATLAB-program for å finne nullpunktene til $\mathbf{F}$ ved hjelp av Newtons metode. Bruk programmet til å finne i hvert fall to (tilnærmede) nullpunkter.

5. Skriv et MATLAB-program for å løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} e^{x+y} &= \sin(x-y) \\ y^2 - x^2 &= 1 \end{aligned}$$

Finn en (tilnærmet) løsning av systemet.

6. Skriv et MATLAB-program for å løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 9 \\ x^2 - y^2 + 2z^2 &= 1 \\ x + y + 10z &= 1 \end{aligned}$$

Finn minst to (tilnærmede) løsninger av systemet.

7. I denne oppgaven skal vi se på konvergensraten i setning 5.5.5. Bruk MATLAB til å regne ut noen ledd av følgen

$$z_n = \frac{(1 - \sqrt{1-2h})^{2^n}}{2^n}$$

for $h = \frac{1}{2}$, $h = 0.4$ og $h = 0.3$. Sammenlign konvergenshastighetene.

8. (Denne oppgaven fyller inn detaljer i beviset for lemma 5.5.9, men den kan godt gjøres uavhengig av lemmaet.) Anta at a, b og c er positive reelle tall, og la $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være annengradspolynomet

$$P(t) = at^2 - bt + c$$

og forutsett at P har reelle røtter

$$t_{\pm} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Anta at $\{t_n\}$ er den følgen vi får når vi starter Newtons metode for P med $t_0 = 0$. Vis at $\{t_n\}$ er en voksende følge og at t_n er mindre enn den minste roten $t_- = \frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ for alle n (bruk induksjon). Forklar at dette betyr at $\{t_n\}$ konvergerer mot en grenseverdi t^*. Vis at $t^* = t_-$.

9. La $\mathbf{F}$ være en funksjon fra $\mathbb{R}^m$ til $\mathbb{R}^m$. Et fikspunkt for $\mathbf{F}$ er det samme som et nullpunkt for funksjonen

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$$

a) Vis at når vi bruker Newtons metode på $\mathbf{G}$, så får vi iterasjonen

$$\mathbf{x}_{n+1} = (\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n) - I_n)^{-1}(\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n)\mathbf{x}_n - \mathbf{F}(\mathbf{x}_n))$$

b) La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være funksjonen gitt ved $f(x) = x^3 + 3x + 1$. Vis at funksjonen har nøyaktig ett fikspunkt og at det ligger mellom -1 og 0.

c) Prøv å finne fikspunktet ved fikspunktiterasjon. Velg $-\frac{1}{2}$ som startpunkt.

d) Prøv å finne fikspunktet ved å bruke Newtons metode på funksjonen $g(x) = f(x) - x$. Velg startpunkt $-\frac{1}{2}$.

10. I denne oppgaven skal vi se på et enkelt eksempel på hvordan Kantorovitsj' teorem kan brukes i praksis. Eksemplet er så enkelt at det å bruke Kantorovitsj' teorem er å skyte spurver med kanoner, men hensikten er å illustrere bruken av teoremet i en situasjon der de regnetekniske komplikasjonene forsvinner.

Vi skal bruke Newtons metode til å finne et nullpunkt for funksjonen $f(x) = x - \cos x$ (ifølge skjæringssetningen må det finnes et nullpunkt). Vi starter iterasjonen med $x_0 = 0$.

a) Vis at $|f'(x)| \leq 2$ for alle x. Forklar at vi dermed kan velge $M = 2$ i Kantorovitsj' teorem.

b) Vis at $f'(x_0) = 1$. Forklar at vi kan bruke $K = 1$ i Kantorovitsj' teorem.

c) Vis at $f'(x_0)^{-1}f(x_0) = -1$. Forklar at $h = KM\epsilon = 2$, og at betingelsen i Kantorovitsj' teorem ikke er oppfylt.

d) Bruk allikevel Newtons metode til å regne ut at $x_1 = 1$.

e) Vi skal nå bruke Kantorovitsj' teorem med x_1 som utgangspunkt. Forklar at vi nå kan bruke $M = 2$, $K = 0.6$ og $\epsilon = 0.25$. Vis at $h < \frac{1}{2}$. Konkluder med at Kantorovitsj' teorem garanterer at iterasjonen konvergerer mot et nullpunkt for f.

Oppgaver til seksjon 5.6

1. Vis at funksjonen $\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y + 1 \\ x - y - 2 \end{pmatrix}$ har en omvendt funksjon $\mathbf{G}$ definert i en omegn rundt $(1, -2)$ slik at $\mathbf{G}(1, -2) = (0, 0)$. Finn den deriverte til $\mathbf{G}$ i punktet $(1, -2)$. Vis at $\mathbf{F}$ også har en omvendt funksjon $\mathbf{H}$ definert i en omegn om

$(1,-2)$ slik at $\mathbf{H}(1,-2)=(-1,-1)$. Finn $\mathbf{H}'(1,-2)$.

2. Vis at funksjonen $\mathbf{F}(x,y)=\begin{pmatrix} e^{x+y^2-1} \\ x-y \end{pmatrix}$ har en omvendt funksjon $\mathbf{G}$ definert i en omegn rundt $(1,-1)$ slik at $\mathbf{G}(1,-1)=(0,1)$. Finn $\mathbf{G}'(1,-1)$. Vis at $\mathbf{F}$ har en annen omvendt funksjon $\mathbf{H}$ definert i en omegn om $(1,-1)$ slik at $\mathbf{H}(1,-1)=(-3,-2)$. Finn $\mathbf{H}'(1,-1)$

3. Vis at gjennom ethvert punkt (x_0,y_0) på kurven med ligning $x^3+y^3+y=1$ går det en funksjon $y=f(x)$ som tilfredsstiller ligningen. Finn $f'(x_0)$.

4. Finn stigningstallet til tangenten til ellipsen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ i punktet (x_0,y_0), $y_0\neq 0$.

5. Finn stigningstallet til tangenten til hyperbelen $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ i punktet (x_0,y_0), $y_0\neq 0$.

6. Finn stigningstallet til tangenten til parabelen $y^2=4ax$ i punktet (x_0,y_0), $y_0\neq 0$.

7. Når man løser differensialligninger, finner man ofte ut at løsningene tilfredsstiller en ligning av typen $\phi(x,y(x))=C$ der C er en konstant. Vis at $y'(x)=-\frac{\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y(x))}$ forutsatt at de partiellderiverte eksisterer og $\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y(x))\neq 0$.

8. En funksjon $z(x,y)$ tilfredsstiller ligningen

$$x+y^2+z^3=3xyz$$

Finn $\frac{\partial z}{\partial x}$ og $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9. En funksjon $z(x,y)$ tilfredsstiller ligningen

$$2x^2+3y^2+z^2=e^{-z}$$

Finn $\frac{\partial z}{\partial x}$ og $\frac{\partial z}{\partial y}$.

10. Vis at det finnes funksjoner $u(x,y)$ og $v(x,y)$ definert i et område rundt $(2,-1)$ som tilfredsstiller ligningene

$$x^2-y^2-u^2+v^2=0$$

$$2xy+y^2-2u^2+3v^4+8=0$$

og $u(2,-1)=2$, $v(2,-1)=1$. Finn $\frac{\partial u}{\partial x}(2,-1)$ og $\frac{\partial v}{\partial x}(2,-1)$.

11. I oppgaver om "koblede hastigheter" (*Kalkulus*, seksjon 7.2) møter vi denne situasjon: Vi vet hvor fort én størrelse y endrer seg (dvs. vi kjenner $y'(t)$) og vi ønsker å regne ut hvor fort en annen størrelse x endrer seg (dvs. vi vil finne $x'(t)$). De to størrelsene er bundet sammen med en ligning $\phi(x(t),y(t))=0$.

a) Vis at $x'(t)=-\frac{\frac{\partial\phi}{\partial y}(x(t),y(t))}{\frac{\partial\phi}{\partial x}(x(t),y(t))}y'(t)$. Hvilke forutsetninger har du gjort i regnestykket ditt?

b) I noen oppgaver kjenner vi *to* hastigheter $y'(t)$ og $z'(t)$, og har en ligning $\phi(x(t), y(t), z(t)) = 0$. Finn et uttrykk for $x'(t)$ i dette tilfellet.

12. Anta at $\phi(x, y, z)$ er en deriverbar funksjon og at det finnes deriverbare funksjoner $X(y, z)$, $Y(x, z)$ og $Z(y, z)$ slik at

$$\phi(X(y,z), y, z) = 0 \qquad \phi(x, Y(x,z), z) = 0 \qquad \text{og} \qquad \phi(x, y, Z(x,y)) = 0$$

Vis at vi har (under passende betingelser)

$$\frac{\partial X}{\partial y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} = -1$$

Denne relasjonen skrives ofte med små bokstaver:

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

og er da til skrekk og advarsel for folk som liker å forkorte ∂x, ∂y og ∂z.

Oppgaver til seksjon 5.7

1. Anta at A er en lukket, begrenset delmengde av $\mathbb{R}^m$ og at $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^k$ er kontinuerlig. Vis at det finnes et tall K slik at $|\mathbf{F}(\mathbf{x})| \leq K$ for alle $\mathbf{x} \in A$.

2. Anta at $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ er en positiv funksjon slik at $\lim_{|\mathbf{x}| \to \infty} f(\mathbf{x}) = 0$. Vis at f har et maksimumspunkt.

3. La A være en lukket og begrenset delmengde av $\mathbb{R}^m$ og anta at $\mathbf{F} : A \to A$ er en kontinuerlig funksjon.

a) Vis at funksjonen $f : A \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{F}(\mathbf{x})|$ er kontinuerlig. Forklar at f har et minimumspunkt.

b) Anta at $|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})| < |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Vis at $\mathbf{F}$ har et entydig fikspunkt. *Hint:* Bruk minimumspunktet fra a).

c) Vis ved et eksempel at dersom vi dropper betingelsen om at A er lukket og begrenset, så behøver ikke $\mathbf{F}$ ha et fikspunkt.

Oppgaver til seksjon 5.8

1. Finn de stasjonære punktene til funksjonen:

a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$
b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$
c) $f(x, y) = x^2 + 2xy - 2y^2 + x + 7y$
d) $f(x, y) = xe^{y^2+x}$
e) $f(x, y, z) = xy - \frac{1}{x} + \frac{2}{y}$

2. Finn de stasjonære punktene og avgjør om de er lokale maksimums-, minimums- eller sadelpunkter:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y$
b) $f(x, y) = x^2y^2 - 4xy + 6x - 6y$
c) $f(x, y, z) = e^{x^2+3y^2}$
d) $f(x, y, z) = \frac{1}{1-x+y+x^2+y^2}$

e) $f(x,y) = x + \ln(x^2 + y^2)$

3. Finn det stasjonære punktet til funksjonen

$$f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x + 6y$$

og avgjør om det er et lokalt maksimumspunkt, minimimumspunkt eller sadelpunkt

4. Finn de stasjonære punktene til funksjonen

$$f(x,y) = x^3 + 5x^2 + 3y^2 - 6xy$$

og avgjør om de er lokale maksimumspunkter, minimimumspunkter eller sadelpunkter.

5. Finn de stasjonære punktene til funksjonen

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2y + 3y^2$$

og avgjør om de er lokale maksimumspunkter, minimimumspunkter eller sadelpunkter.

6. Finn de stasjonære punktene til funksjonen

$$f(x,y) = (x + y^2)e^x$$

og avgjør om de er lokale maksimumspunkter, minimimumspunkter eller sadelpunkter.

7. Finn de stasjonære punktene til funksjonen

$$f(x,y,z) = xyz - x^2 - y^2 - z^2$$

og avgjør om de er lokale maksimumspunkter, minimimumspunkter eller sadelpunkter.

8. (Eksamen i MAT1110, 13/6, 2007)

a) Finn de stasjonære punktene til $f(x,y) = 2x^2y + 4xy - y^2$.

b) Avgjør om de stasjonære punktene er lokale maksimumspunkter, lokale minimumspunkter eller sadelpunkter.

9. (Eksamen i MAT1110, 13/8, 2007)

a) Finn de stasjonære punktene til $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^x$.

b) Avgjør om de stasjonære punktene er lokale maksimumspunkter, lokale minimumspunkter eller sadelpunkter.

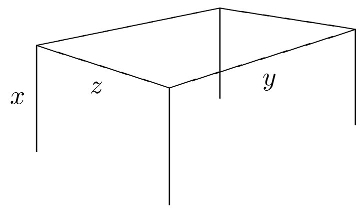
10. La $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.

a) Finn de stasjonære punktene til f og avgjør om de er lokale maksimumspunkter, lokale minimumspunkter eller sadelpunkter.

b) Finn maksimum og minimum til f på området $\{(x, y) \mid |x| \le 1, |y| \le 3\}$. Bruk MATLAB eller en lommeregner til å tegne grafen.

11. Du skal lage en boks med volum V. Boksen skal ha bunn og fire sideflater, men ingen topp. Hvordan skal du lage boksen for at overflatearealet skal bli minst mulig?

12. Du skal lage en ramme av stålrør som skal brukes som reisverk til et telt. Rammen består av fire bein med lengde x festet til et rektangel med sider y og z, se figur under. Lengdene x, y og z måles i meter.



Volumet $V = xyz$ av teltet skal være 500 m^3. Din oppgave er å lage teltet slik at den totale lengden L av stålrør som går med blir minst mulig.

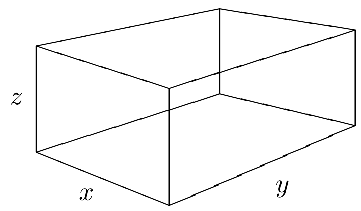
a) Begrunn at lengden L kan skrives som

$$L(x, y) = 4x + 2y + \frac{1000}{xy}$$

og finn de partiellderiverte $\frac{\partial L}{\partial x}$ og $\frac{\partial L}{\partial y}$.

b) Bestem de dimensjonene av teltet som gjør totallengden av stålrør minst mulig.

13. Vi skal bygge en rettvinklet kasse uten lokk, se figur nedenfor. Kassen skal ha sidelengder x og y og høyde z. Selve "skjelettet" til kassen skal lages av 12 tynne rør (markert med streker på figuren). Den totale lengden rør vi skal benytte er 56 meter.



Figur 4

a) Begrunn at arealet A av kassens utside (de fire veggene pluss bunnen) som funksjon av x og y kan skrives

$$A(x, y) = 28x + 28y - 2x^2 - 2y^2 - 3xy.$$

og finn de partiellderiverte av A. Bestem deretter eventuelle punkter (x, y) der begge de partiellderiverte er null, og avgjør om disse punktene er lokale minimumspunkter for A, lokale maksimumspunkter for A eller ingen av delene.

b) Finn maksimumsverdien for $A(x, y)$ på området i xy-planet gitt ved $0 \leq x \leq 14$, $0 \leq y \leq 14$. Hvordan bør sidelengdene x og y velges for at arealet av kassens utside skal bli størst mulig? (Begrunn svaret.)

14. (Eksamen i MAT 1100, 9/12, 2005) Oslo kommune planlegger å bygge et akvarium med volum 5000 m^3. Kostnadene er gitt ved:

Fronten – en glassplate: 1000 kr. per m^2.

Sidekantene – 3 stk. i stål: 300 kr. per m^2

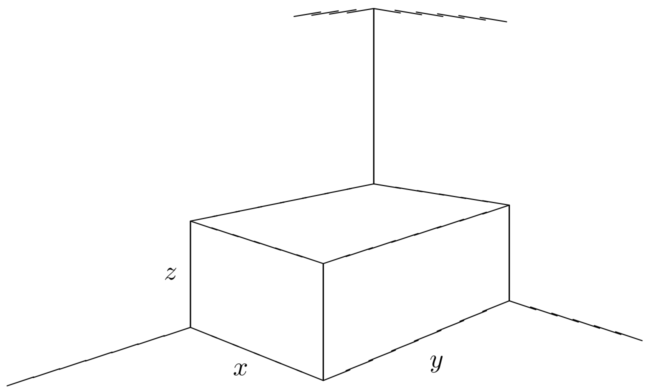
Bunnen – i sement: 500 kr. per m^2

Anta glassplaten har lengde l og høyde h. Forklar hvorfor materialene koster

$$f(l, h) = 100\left(13lh + \frac{30000}{l} + \frac{25000}{h}\right)$$

Finn l og h som minimaliserer materialkostnadene.

15. Et baderom har takhøyde 3 m og et kvadratisk gulv som er 4 m^2. I dette rommet skal vi plassere et badekar av lengde x, bredde y og høyde z (målt i meter) og med volum $xyz = \frac{2}{3}$ m^3. Badekaret skal plasseres i det ene hjørnet av baderommet som vist på tegningen.



Figur 4

Ut i fra dimensjonene på rommet og karet får vi: $0 < x \leq 2$, $0 < y \leq 2$, $0 < z \leq 3$ (og derfor også $xy = \frac{2}{3z} \geq \frac{2}{9}$ (m)^2). Vi skal flislegge de to veggene badekaret berører, samt badegulvet, men vi flislegger bare de delene av veggene og gulvet som badekaret ikke dekker. Vi bruker to forskjellige typer fliser til vegger og gulv. Prisen på veggflisene er 90 kr/m^2 og på gulvflisene 60 kr/m^2. La $P(x, y)$ betegne totalprisen på flisene som funksjon av x og y angitt i kr.

a) Vis at vi får $P(x, y) = 1320 - \frac{60}{x} - \frac{60}{y} - 60xy$, og beregn $\frac{\partial P}{\partial x}$ og $\frac{\partial P}{\partial y}$.

b) For å få oversikt over utgiftene til flisleggingen ønsker vi å finne den verdien av (x, y) som gjør at $P(x, y)$ blir størst mulig. Finn denne verdien av (x, y) og den tilsvarende verdien til P.

16. Det amerikanske postvesenet ekspederer bare pakker der summen av lengde, bredde og høyde er mindre enn 108 tommer. Hva er det største volumet en kasseformet pakke kan ha?

17. En fabrikk produserer to modeller av en vare. Det koster 400 kr. å lage standardmodellen og 600 kr. å lage luksusmodellen. Undersøkelser viser at når utsalgsprisene for standardmodellen og luksusmodellen er hhv. x og y kroner, så får fabrikken solgt $5(y-x)$ eksemplarer av standardmodellen og $450000 + 500(x-2y)$ eksemplarer av luksusmodellen. Hvordan skal prisene settes for å maksimere fortjenesten?

18. To bedrifter konkurrerer om å selge nesten identiske varer i samme marked. En økning i produksjonen hos den ene bedriften fører derfor til svikt i inntektene hos den andre. Hvis bedrift A produserer x enheter per måned, og bedrift B produserer y enheter per måned, er de månedlige fortjenestene gitt ved

$$P = 12000x - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} \qquad \text{for bedrift } A$$

$$Q = 12000y - \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{6} \qquad \text{for bedrift } B$$

a) Dersom bedriftene ikke samarbeider om å fastsette produksjon, er det naturlig å anta at hver av bedriftene uavhengig av den andre fastsetter sin produksjon slik at egen fortjeneste blir så stor som mulig. Dessuten antar hver av bedriftene at den andre gjør det samme. Forklar hvorfor produksjonsnivået (x, y) er løsningen av ligningssystemet

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

Finn fortjenestene til A og B i dette tilfellet.

b) Bedriftsledelsen i de to bedriftene tror at ved å samarbeide om produksjonsnivået kan de øke den totale fortjenesten til bedriftene. Forklar at det optimale produksjonsnivået nå er løsningen av ligningssystemet

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

Finn fortjenestene til A og B i dette tilfellet.

c) Anta at bedriftene i hemmelighet har samarbeidet om å fastsette produksjonsnivået. Etter en stund oppdager bedrift B, som tidligere var mest lønnsom, at bedrift A nå er blitt markedsleder. Bedrift B bestemmer seg derfor for å bryte avtalen uten å si fra til A. Gitt at A fastholder sitt produksjonsnivå fra b), hvordan skal B velge sitt produksjonsnivå for å få størst mulig fortjeneste? Hva blir fortjenestene til A og B i dette tilfellet?

19. I denne oppgaven er $f(x, y) = x^4 + y^4$.

a) Vis at (0,0) er et stasjonært punkt der Hesse-determinanten D er lik null. Vis at (0,0) er et minimumspunkt for funksjonen.

b) Lag en funksjon $g(x, y)$ der (0,0) er et maksimumspunkt, men hvor Hessedeterminanten i (0,0) er lik null.

c) Lag en funksjon $h(x, y)$ slik at (0,0) er et sadelpunkt, men hvor Hesse-determinanten i (0,0) er lik null.

20. I denne oppgaven skal vi se på noen viktige forskjeller mellom funksjoner av henholdsvis én og flere variable.

a) La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en deriverbar funksjon av én variabel og anta at det eneste stasjonære punktet til f er et lokalt maksimum i a. Vis at da er a et globalt maksimum for f.

b) La

$$f(x, y) = 1 - x^2 - (1 + x)^3 y^2$$

Vis at (0,0) er det eneste stasjonære punktet til f.

c) Vis at (0,0) er et lokalt maksimum, men ikke et globalt maksimum for f. Bruk MATLAB til å tegne grafen til f, og tenk gjennom forskjellen på én og flere dimensjoner.

d) La $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon av én variabel og anta at a og b er to lokale maksimumspunkter for f. Vis at det finnes et lokalt minimumspunkt mellom a og b.

e) La

$$g(x, y) = 4x^2 e^y - 2x^4 - e^{4y}$$

Vis at de stasjonære punktene til g er $(-1, 0)$ og $(1, 0)$.

f) Vis at begge de to stasjonære punktene til g er lokale maksimumspunkter. Bruk MATLAB til å tegne grafen til g, og tenk gjennom forskjellen på én og flere dimensjoner.

Oppgaver til seksjon 5.9

1. Finn maksimums- og minimumspunktene (hvis de finnes) til funksjonen f under bibetingelsen(e).

a) $f(x, y) = 4x - 3y$ når $x^2 + y^2 = 1$.

b) $f(x, y) = xy$ når $9x^2 + y^2 = 18$

c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ når $2x - 3y + 2z = 17$

d) $f(x, y, z) = x + y + z$ når $x^2 + y^2 = 1$ og $2x + z = 1$

e) $f(x, y, z) = 2x + 3y$ når $3x^2 + 2y^2 = 3$

f) $f(x, y, z) = x^2 - 2x + 2y^2 + z^2 + z$ når $x + y + z = 1$ og $2x - y - z = 5$

2. Finn punktene på flaten $z^2 - xy = 1$ som ligger nærmest origo.

3. Finn punktene på skjæringkurven mellom flatene $x^2+y^2 = 1$ og $x^2-xy+y^2-z^2 = 1$ som ligger nærmest origo.

4. Løs oppgave 11 i forrige seksjon ved hjelp av Lagranges multiplikatorer.

5. Løs oppgave 12 i forrige seksjon ved hjelp av Lagranges multiplikatorer.

6. Løs oppgave 13 i forrige seksjon ved hjelp av Lagranges multiplikatorer.

7. Løs oppgave 16 i forrige seksjon ved hjelp av Lagranges multiplikatorer.

8. La $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) - \frac{x^2}{2} + y^2$.

a) Finn de stasjonære punktene til f og avgjør om de er lokale maksimumspunkter, lokale minimumspunkter eller sadelpunkter.

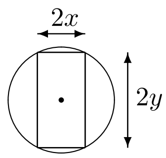
b) Finn maksimum og minimum til f på området $\{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$. (*Hint:* Det kan lønne seg å bytte til polarkoordinater.)

9. En rektangulær boks med kanter parallelle med koordinataksene skal plasseres inni ellipsoiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Hva er det største volumet denne boksen kan ha?

10. Av en sylinderformet stokk med radius r skal det skjæres ut en bjelke med bredde $2x$ og høyde $2y$. (Se figur). Bæreevnen til bjelken er proporsjonal med x og med kvadratet av y, dvs. den er gitt ved funksjonen

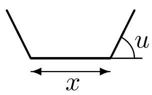
$$f(x,y) = kxy^2$$

der k er en konstant.



Finn de verdier av x og y som gir størst verdi for $f(x,y)$.

11. En renne skal lages ved at en b cm bred metallplate brettes opp symmetrisk på begge sider. Figuren viser et tverrsnit av rennen. Hvordan må vi velge bredden x og vinkelen u for at tverrsnittet skal få størst mulig areal?



12. *Herons formel* sier at arealet til en trekant med sider x, y, z er

$$A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$$

der $s = \frac{x+y+z}{2}$ er halve omkretsen. Bruk Lagranges multiplikatormetode til å vise at blant alle trekanter med samme omkrets, er det den likesidede som har størst areal.

13. La S være ellipsoideflaten

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

a) Finn ligningen for tangentplanet til S i punktet (x_0, y_0, z_0).

b) Anta at $x_0, y_0, z_0 > 0$. Finn volumet til pyramiden avgrenset av koordinatplanene og tangentplanet til S i (x_0, y_0, z_0).

c) Finn det punktet (x,y,z) på S med $x, y, z \geq 0$ som gjør produktet xyz størst mulig.

d) Hva er det minste volumet pyramiden i b) kan ha?

14. I økonomi regner man ofte at profitten kan modelleres som en *Cobb-Douglas-funksjon*. Det betyr at profitten er gitt ved $P(x, y) = Kx^\alpha y^\beta$ der K, α, β er positive konstanter, og x og y står for det beløpet man investerer i forskjellige "innsatsfaktorer", f.eks. kan x være investeringen i råvarer og y investeringen i arbeidskraft. Anta at den totale investeringen er gitt, dvs. at $x + y = S$, der S er en konstant.

a) Vis at profitten er størst når $x = \frac{\alpha S}{\alpha+\beta}$, $y = \frac{\beta S}{\alpha+\beta}$. Hva er den maksimale profitten?

b) Generaliser resultatet ovenfor til flere innsatsfaktorer. Anta at

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Kx_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

(der $K, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ er positive konstanter) og finn maksimumsverdien til P under bibetingelsen $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$.

15. Anta at en forbruker har valget mellom to varetyper. De to vareslagene koster hhv. p og q kroner per enhet. I økonomiske modeller regner man ofte med at nytten forbrukeren har av å kjøpe x enheter av den ene varetypen og y enheter av den andre, er gitt ved en *nyttefunksjon* av typen

$$U(x, y) = a \ln x + b \ln y$$

der a og b er positive konstanter. Dersom forbrukeren har S kroner til rådighet, ønsker hun å maksimere nyttefunksjon under bibetingelsen $px + qy = S$. Vist at hun får maksimalt utbytte ved å velge $x = \frac{aS}{p(a+b)}$ og $y = \frac{bS}{q(a+b)}$.

16. Et firma produserer to vareslag. Det har et samlet produksjonsbudsjett på S kroner i året og et utviklingsbudsjett på T kroner i året. Firmaet regner at hvis det bruker x kroner på produksjon av vareslag 1 og samtidig bruker y kroner på å videreutvikle produktet, vil overskuddet fra vareslag 1 være

$$U(x, y) = Ax^\alpha y^{1-\alpha}$$

der A og α er konstanter, $0 \leq \alpha < 1$. Hvis firmaet på samme måte bruker z kroner på produksjon av vareslag 2 og samtidig bruker u kroner på videreutvikling, regner det med at overskuddet fra vareslag 2 vil være

$$V(z, u) = Bz^\beta u^{1-\alpha}$$

der B og β er konstanter, $0 \leq \beta < 1$.

a) Forklar hvorfor det er naturlig for firmaet å optimere størrelsen $U(x, y) + V(z, u)$ under bibetingelsene $x + z = S$, $y + u = T$.

b) Vis at Lagranges multiplikatormetode leder til ligningene

$$\begin{aligned}
\alpha A(\frac{x}{y})^{\alpha-1} &= \lambda \\
(1-\alpha)A(\frac{x}{y})^{\alpha} &= \mu \\
\beta B(\frac{z}{u})^{\beta-1} &= \lambda \\
(1-\beta)B(\frac{z}{u})^{\beta} &= \mu \\
x+z &= S \\
y+u &= T
\end{aligned}$$

c) Vis ved å kombinere de to første ligningene ovenfor at $\frac{x}{y} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\mu}{\lambda}$. Vis også at $\frac{z}{u} = \frac{\beta}{1-\beta}\frac{\mu}{\lambda}$.

d) Vis ved å kombinere den første og tredje ligningen ovenfor at

$$\alpha A(\frac{x}{y})^{\alpha-1} = \beta B(\frac{z}{u})^{\beta-1}$$

Sett inn uttrykkene for $\frac{x}{y}$ og $\frac{z}{u}$ fra c) og vis at dette leder til formelen

$$\frac{\mu}{\lambda} = \left[\frac{B\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}}{A\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}}\right]^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$$

e) For enkelthets skyld kaller vi uttrykket på høyre side av uttrykket ovenfor for K. Vi har med andre ord $\frac{\mu}{\lambda} = K$. Ifølge c) har vi dermed $\frac{x}{y} = \frac{\alpha}{1-\alpha}K$ og $\frac{z}{u} = \frac{\beta}{1-\beta}\frac{\mu}{\lambda}$. Sett disse uttrykkene inn i de to siste ligningen i ligningssystemet i b), og finn x, y, z og u.

17. I denne oppgaven skal vi se på en anvendelse av Lagranges multiplikatormetode i statistisk fysikk. La oss begynne med en kort skisse av den fysiske problemstillingen (selv om det egentlig ikke er nødvendig å skjønne fysikken for å løse oppgaven): Vi har et system med N partikler (N er et svært stort tall) som kan fordele seg på n energinivåer $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Den totale energien til systemet er U, og sannsynligheten for å finne en tilfeldig partikkel på energinivå E_i er p_i. Målet er å finne den mest sannsynlige fordelingen av partiklene på energinivåene. Denne fordelingen er gitt ved vektoren $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ der x_i er antall partikler på nivå E_i.

Etter noen innledende betraktninger (som er ren sannsynlighetsregning) kommer man frem til at man ønsker å finne maksimum til funksjonen

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = N - \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\left(\frac{x_i}{p_i}\right)$$

under bibetingelsene

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = N \qquad \text{(det totale antall partikler er } N\text{)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i E_i = U \qquad \text{(den totale enegien er } U\text{)}$$

a) La g og h være funksjonene $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$, $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i E_i$. Vis at

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\ln\left(\frac{x_i}{p_i}\right) + 1, \qquad \frac{\partial g}{\partial x_i} = 1 \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial h}{\partial x_i} = E_i$$

b) Vis at Lagranges multiplikatormetode gir ligningene

$$-\ln\left(\frac{x_i}{p_i}\right) + 1 = \lambda + \mu E_i \qquad \text{for } i = 1, 2, \ldots, n$$

i tillegg til bibetingelsene $\sum_{i=1}^n x_i = N$ og $\sum_{i=1}^n x_i E_i = U$.

c) Vis at $x_i = p_i e^{-\lambda - \mu E_i + 1}$.

d) Vi innfører nå *partisjonsfunksjonen* $Z = \sum_{i=1}^N p_i e^{-\mu E_i}$. Bruk den første bibetingelsen til å vise at $x_i = \frac{N}{Z} p_i e^{-\mu E_i}$. Dermed har vi kvittet oss med den første multiplikatoren λ.

e) Vis at den gjenværende multiplikatoren μ er bestemt av ligningen $U = \frac{N}{Z} \sum_{i=1}^n p_i E_i e^{-\mu E_i}$.

Dette viser at μ er knyttet til den totale energien til systemet. Faktisk viser det seg at $\mu = \frac{1}{kT}$ der T er temperaturen til systemet (målt i grader Kelvin) og k er en konstant (*Boltzmanns konstant*). Vi ender dermed opp med den fundamentale sammenhengen $x_i = \frac{N}{Z} p_i e^{-\frac{E_i}{kT}}$ som kalles *Maxwell-Boltzmann-fordelingen.*

Oppgave til seksjon 5.10

1. Skriv et MATLAB-program som bruker gradientmetoden til å finne minimumspunktet til $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + x - y$. Sjekk resultatet ved å finne minimumspunktet ved regning.

Fasit til kapittel 5

Seksjon 5.1

1. a) lukket b) åpen c) hverken lukket eller åpen d) lukket e) åpen f) lukket g) hverken lukket eller åpen h) åpen i) lukket

2. a) $(2, -\frac{3}{2})$ b) $(1, -2)$ c) $(1, 1, e^{-\frac{1}{2}})$

Seksjon 5.3

1. Fikspunkt $(-1, 1)$.

2. Likevektspunkt: $x \approx 297, y \approx 3970$

Seksjon 5.5

1. a) Nullpunkter: $0, \pm 1$.

2. b) $(\pm 0.7862, 0, 6180)$ c) $(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$

3. a) Førstekomponenten er null på alle linjer $x + y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, mens annenkomponenten er null på alle linjer $x - y = \frac{\pi}{2} + m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Funksjonen er null i alle skjæringspunkter mellom slike linjer.

Seksjon 5.6

1. $\mathbf{G}'(1, -2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}'(1, -2) = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\mathbf{G}'(1, -1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}'(1, -1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $f'(x_0) = -\frac{3x_0^2}{3y_0^2+1}$

4. $k = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$

5. $k = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$

6. $k = -\frac{2a}{y_0}$

8. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1-3yz}{3(xy-z^2)}$ og $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y-3xz}{3(xy-z^2)}$ forutsatt at $z^2 \neq xy$.

9. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4x}{2z+e^{-z}}$ og $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{6y}{2z+e^{-z}}$ forutsatt at $2z + e^{-z} \neq 0$.

10. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{13}{8}$ og $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{5}{4}$.

11. b) $x'(t) = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial y}(x(t),y(t))}{\frac{\partial \phi}{\partial x}(x(t),y(t))} y'(t) - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial z}(x(t),y(t))}{\frac{\partial \phi}{\partial x}(x(t),y(t))} z'(t)$

Seksjon 5.8

1. a) $(2,-1)$ b) $(0,0)$ c) $(-\frac{3}{2},1)$ d) $(-1,0)$, e) $(\frac{1}{4},-4)$

2. a) Min. i $(1,-2)$ b) Sadelpunkt i $(-1,1)$ c) Min. i $(0,0)$ d) Maks. i $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ e) Sadelpunkt i $(-2,0)$

3. $(1,-2)$, lokalt minimum.

4. $(0,0)$ er et lokalt minimum, $(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3})$ er et sadelpunkt.

5. $(1,-\frac{1}{2})$, sadelpunkt.

6. $(-1,0)$, lokalt minimum.

7. Lokalt minimum i $(0,0,0)$, sadelpunkter i $(2,2,2),(2,-2,-2),(-2,2,-2),(-2,-2,2)$

8. a) Stasjonære punkter: $(0,0),(-2,0),(-1,-1)$
b) De to første punktene er sadelpunkter, det siste et lokalt makiimum.

9. a) $(0,0),(-2,0)$
b) $(0,0)$ er et lokalt (og faktisk et globalt) minimum, $(-2,0)$ er et sadelpunkt.

10. a) $(0,0)$ er et sadelpunkt, $(\pm\sqrt{2},0)$ er lokale (og globale) maksimumspunkter, $(0,\pm\sqrt{2})$ er lokale (og globale) minimumspunkter.
b) Minimumsverdi: $-2e^{-1}$ i $(0,\pm\sqrt{2})$. Maksimumsverdi: $e^{-\frac{1}{2}}$ i $(\pm 1,0)$

11. Sidene i grunnflaten skal være $\sqrt[3]{2V}$ og høyden $\frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$.

12. a) $\frac{\partial L}{\partial x}=4-\frac{1000}{x^2y}, \frac{\partial L}{\partial y}=2-\frac{1000}{xy^2}$
b) $x=5, y=z=10$

13. a) $\frac{\partial A}{\partial x}=28-4x-3y, \frac{\partial A}{\partial y}=28-4y-3x$, lokalt maksimum for $x=y=4$
b) Maksimalt areal $A=122$ for $x=y=4$

14. $l=\frac{60}{\sqrt[3]{78}}, h=\frac{50}{\sqrt[3]{78}}$

15. a) $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{60}{x^2}-60y, \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{60}{y^2}-60x$
b) Maksimalverdi $P=1140$ for $x=y=1$

16. $x=y=z=36$

17. $x=650,\ y=750$

18. a) $x=y=12\,000, P=36\,000\,000, Q=48\,000\,000$
b) $x=9\,000, y=8\,000, P=51\,500\,000, Q=50\,500\,000$
c) $x=9\,000, y=12\,000, P=31\,500\,000, Q=58\,500\,000$

Seksjon 5.9

1. a) Maks.verdi 5 i punktet $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$, min.verdi -5 i punktet $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$.
b) Maks.verdi 3 i punktene $(1, 3)$ og $(-1, -3)$, min.verdi -3 i $(1, -3)$ og $(-1, 3)$.
c) Min.verdi 17 i punktet $(2, -3, 2)$. Ingen maksimalverdi.
d) Maks.verdi $1 + \sqrt{2}$ i punktet $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2})$, min.verdi $1 - \sqrt{2}$ i punktet $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2})$
e) Maks.verdi $\frac{19}{\sqrt{70}}$ i punktet $(\frac{4}{\sqrt{70}}, \frac{9}{\sqrt{70}})$, min.verdi $-\frac{19}{\sqrt{70}}$ i punktet $(-\frac{4}{\sqrt{70}}, -\frac{9}{\sqrt{70}})$.
f) Min. verdi $-\frac{1}{12}$ i punktet $(2, -\frac{1}{6}, -\frac{5}{6})$.

2. $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$

3. $(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0)$

8. a) Lokalt min. i $(0, 0)$, sadelpunkter i $(\pm 1, 0)$
b) Min.verdi 0 i $(0, 0)$, maks.verdi $\ln 2 + 1$ i $(0, \pm 1)$

9. $V = \frac{abc}{3\sqrt{3}}$

10. $x = \frac{R}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{\frac{2}{3}}R$

11. $x = \frac{b}{3}, u = \frac{\pi}{3}$

13. a) $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$
b) $V = \frac{a^2 b^2 c^2}{6 x_0 y_0 z_0}$
c) $x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{b}{\sqrt{3}}, z = \frac{c}{\sqrt{3}}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{2} abc$

14. a) $P_{\max} = K \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta S^{\alpha+\beta}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}$
b) $P_{\max} = K \frac{\alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} \cdots \alpha_n^{\alpha_n} S^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}$ for $x_1 = \frac{\alpha_1 S}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}, x_2 = \frac{\alpha_2 S}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} \ldots$

16. $x = \frac{S\alpha(1-\beta)-\alpha\beta KT}{\alpha-\beta}, y = \frac{S(1-\beta)(1-\alpha)-\beta(1-\alpha)KT}{(\alpha-\beta)K}, z = \frac{S\beta(1-\alpha)-\alpha\beta KT}{\beta-\alpha}$ og $u = \frac{S(1-\beta)(1-\alpha)-\alpha(1-\beta)KT}{(\beta-\alpha)K}$