FORMELSAMLING FOR MAT 1110

Eksponentialfunksjoner

Derivasjon: $(a^x)' = a^x \ln a$ spesielt $(e^x)' = e^x$
Identiteter: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(a^x)^y = a^{xy}$

Logaritmefunksjonen

Derivasjon: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
Identiteter: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$ $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$
$\ln(x^a) = a \ln x$ for $x, y > 0$

Trigonometriske funksjoner

Derivasjon: $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
Identiteter: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
$\sin x = \pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$
$\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$-$

Arcusfunksjoner

Derivasjon; $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Integraler

$\int \frac{1}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$

$\int \frac{1}{x^2-a^2}\, dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\, dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \quad a \neq 0$

$\int \sin^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x \cos x + C$

$\int \cos^2 x \; dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \cos x + C$
$\int \frac{1}{\sin x} \; dx = \ln \left| \frac{1-\cos x}{\sin x} \right| + C$
$\int \frac{1}{\cos x} \; dx = \ln \left| \frac{1+\sin x}{\cos x} \right| + C$
$\int \sin^n x \; dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \; dx$
$\int \cos^n x \; dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \; dx$
$\int e^{ax} \sin bx \; dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C$
$\int e^{ax} \cos bx \; dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (b \sin bx + a \cos bx) + C$

Rekker

Taylorrekken til f om a: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$

Geometriske rekker: $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, konvergensområde $(-1, 1)$

Binomiske rekker: $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, konvergensradius 1 for $\alpha \notin \mathbf{N}$

Noen Taylorrekker: $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, konvergensområde $[-1, 1)$

$\arctan x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, konvergensområde $[-1, 1]$

Taylors formel: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \; dt =$

$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$

Funksjoner av flere variable

Gradienten: $\nabla f(\mathbf{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}))$

Kjerneregelen. På matriseform: $\mathbf{H}'(\mathbf{a}) = \mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{a}))\mathbf{G}'(\mathbf{a})$

På komponentform: $\frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_m}(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(\mathbf{a})$

Linearisering av F: $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \mathbf{F}(\mathbf{a})$

Normalvektor: $\mathbf{n} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, \mathbf{j} + \mathbf{k}$

Tangentplan: $z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$

Newtons metode: $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - (\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n))^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$

Annenderiverttesten: Anta at (a,b) er et stasjonært punkt og la $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$, $D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Da gjelder:
i) Hvis $D < 0$, er (a,b) et sadelpunkt.
ii) Hvis $D > 0$ og $A > 0$, er (a,b) et lokalt minimum.
iii) Hvis $D > 0$ og $A < 0$, er (a,b) et lokalt maksimum.

Lagranges multiplikatormetode: $\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{a}) + \lambda_2 \nabla g_2(\mathbf{a}) \cdots + \lambda_k \nabla g_k(\mathbf{a})$ (eller gradientene på høyre side lineært avhengige).

Derivasjon av omvendt funksjon: $(\mathbf{F}^{-1})'(\mathbf{y}) = \mathbf{F}'(\mathbf{x})^{-1}$ der $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Derivasjon av implisitt funksjon: Hvis $f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$, så $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}$

Parametriserte kurver og linjeintegraler

Hastighet: $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t))$

Fart: $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}$

Akselerasjon: $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t) = (x_1''(t), x_2''(t), \ldots, x_n''(t))$

Banekselerasjon: $a(t) = v'(t)$

Buelengde: $s = L(a,b) = \int_a^b v(t)\, dt = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}\, dt$

Linjeintegral av skalarfelt: $\int_{\mathcal{C}} f\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) v(t)\, dt$

Linjeintegral av vektorfelt: $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{v}(t)\, dt$

Integral av gradient: $\int_{\mathcal{C}} \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$

Nødvendig betingelse for konservativt felt: $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ alle $\mathbf{x}, i, j$.

Multiple integraler

Skifte av variabel: $\iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_S f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$

Polarkoordinater: $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, <u>Jacobideterminant</u>: r

Sylinderkoordinater: $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$, <u>Jacobideterminant</u>: r

Kulekoordinater: $x = \rho \sin\phi \cos\theta, y = \rho \sin\phi \sin\theta, z = \rho \cos\phi,$
<u>Jacobideterminant</u>: $\rho^2 \sin\phi$

Flateintegral: Generelt: $\int_S f\ dS = \iint_R f(X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv$

For $z = g(x,y)$: $\int_S f\ dS = \iint_R f(x,y,g(x,y)) \sqrt{1 + (\frac{\partial g}{\partial x})^2 + (\frac{\partial g}{\partial y})^2}\ dxdy$

Greens teorem: $\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\mathcal{C}} P\ dx + Q\ dy$

Kjeglesnitt

Parabel: $(y-n)^2 = \pm 4a(x-m)$ eller $(x-m)^2 = \pm 4a(y-n)$, <u>brennvidde</u>: $a > 0$

Ellipse: $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$, <u>brennvidde</u>: $c = \sqrt{|a^2 - b^2|}$

Hyperbel: $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ eller $\frac{(y-n)^2}{b^2} - \frac{(x-m)^2}{a^2} = 1$,
<u>brennvidde</u>: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, <u>asymptoter:</u> $y - n = \pm \frac{b}{a}(x-m)$

Vektorregning og determinanter

Vektorprodukt: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2\, , a_3b_1 - a_1b_3\, , a_1b_2 - a_2b_1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

Determinanter: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Regneregler for determinanter: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, $\det(A^T) = \det(A)$

Matriser og lineæravbildninger

Def. av lineæravbildning: (i) $\mathbf{T}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{T}(\mathbf{x})$, (ii) $\mathbf{T}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{T}(\mathbf{y})$

Def. av affinavbildning: $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{c}$

Matrisen til en lineæravbildning T: $A = (\mathbf{T}(\mathbf{e}_1), \mathbf{T}(\mathbf{e}_2) \ldots, \mathbf{T}(\mathbf{e}_n))$

Egenvektor v og egenverdi λ: $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$

Betingelse for egenverdi: $\det(\lambda I_n - A) = 0$