MAT 1110: Obligatorisk oppgave 2, V-09

Innleveringsfrist: *Fredag 24. april, 2009, kl.14.30, på Ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt (7. etasje NHA). Erfaringsmessig blir det lange køer både ved skriverne og utenfor ekspedisjonskontoret rett før innleveringsfristen, så det er smart å levere tidligere. Se forøvrig*

http://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT1110/v09/obliger.xml

for nærmer informasjon om obligatoriske oppgaver ved Matematisk institutt. Husk spesielt å søke om utsettelse til studieinfo@math.uio.no *før innleveringsfristen dersom du blir syk!*

Instruksjoner: *Oppgaven er obligatorisk, og studenter som ikke får besvarelsen godkjent, vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. For å få besvarelsen godkjent, må man ha minst 60% score, og det vil bli lagt vekt på at man har en klar og ryddig besvarelse med gode begrunnelser. Det vil også bli lagt vekt på at MATLAB-delen av oppgavene er rimelig godt besvart — besvarelser som røper mangelfulle MATLAB-ferdigheter, kan bli underkjent selv om de har en score på mer enn 60%. De grunnleggende MATLAB-ferdighetene som testes i dette oppgavesettet, er matriseoperasjoner, graftegning og programmering.*

Alle delspørsmål (punktene 1a), 1b) osv.) teller like mye. Du kan få poeng på en oppgave selv om du ikke er kommet frem til et svar, og det er derfor viktig at du leverer inn alt det du har kommet frem til. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse.

Det er lov å samarbeide og å bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen skal imidlertid være skrevet av deg *og gjenspeile* din *forståelse av stoffet. Du skal selv ha tastet inn alle programmene og selv ha gjennomført alle MATLAB-kjøringene. Er vi i tvil om at du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.*

Alle svar skal begrunnes. Der oppgaven krever at du skal bruke MATLAB, må du legge ved utskrifter av m-filer og figurer. Du må også redegjøre for hvilke andre kommandoer og rutiner du har brukt, f.eks. ved å legge ved en dagbokfil ("diary") med kommentarer.

Det er anledning til å bruke python istedenfor MATLAB i denne obligen. Du må da selv "oversette" MATLAB-terminologien i oppgaveteksten til tilsvarende python-terminologi. Vi gjør oppmerksom på at foreleser og gruppelærere bare kan gi begrenset hjelp med python-spørsmål.

I dette oppgavesettet skal vi se på en enkel modell for interaksjonen mellom to dyreslag som lever i det samme området. Vi lar x_n og y_n betegne antall dyr av hvert slag i området etter n år, og antar at tidsutviklingen er gitt ved

$$x_{n+1} = 1.01x_n - 0.05y_n + 1600 \tag{1}$$

$$y_{n+1} = 0.04x_n + 0.97y_n + 400 \tag{2}$$

Ideen bak modellen er at x-ene er byttedyr, mens y-ene rovdyr. Hadde byttedyrene vært alene i et isolert område, ville bestanden ha vokst med 1% i året, men pga. av rovdyrene reduseres bestanden med et ledd $0.05y_n$. Området får også en tilførsel fra naboområdene på 1600 byttedyr i året. Disse antagelsene gir oss den første ligningen. Den andre ligningen har en tilsvarende begrunnelse, men leddet $0.04x_n$ har positiv fortegn siden byttedyrene bidrar til at rovdyrbestanden vokser.

Oppgavesettet består av tre oppgaver som alle handler om modellen ovenfor. Oppgave 1 og 2 kan gjøres uavhengig av hverandre. Oppgave 3 bygger delvis på oppgave 2.

Oppgave 1

a) Lag en m-fil som regner ut følgene $\{x_n\}$ og $\{y_n\}$. Anta at $x_1 = 600$ og at $y_1 = 300$. Plott følgene i samme koordinatsystem for n fra 1 til 500.

b) Dyrestammene ovenfor dør aldri ut (dvs. at x_n og y_n er postive for alle n). Anta nå at byttedyrene er litt mer fruktbare enn opprinnelig antatt, og at bestanden vil vokse med 3% per år dersom den lever alene i et isolert område. Tilpass programmet ditt til den nye situasjonen. Hva skjer med dyrestammene? Kommenter.

Oppgave 2

a) Vis at egenverdiene til en 2×2-matrise $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ er

$$\lambda = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}$$

b) La $\mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Forklar at ligningssytemet (1)-(2) ovenfor kan skrives som

$$\mathbf{u}_{n+1} = A\mathbf{u}_n + \mathbf{b} \tag{3}$$

for en matrise A og en vektor $\mathbf{b}$.

c) Finn egenverdiene λ_1, λ_2 og egenvektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ til matrisen A i punkt b). Du kan velge om det vil bruke MATLAB eller regne for hånd (kalkulator er tillatt!).

d) Skriv vektorene $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1600 \\ 400 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 600 \\ 300 \end{pmatrix}$ som lineærkombinasjoner av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. Du kan velge om det vil bruke MATLAB eller regne for hånd.

Oppgave 3

a) Anta at c og d er tall, $c \neq 1$. Leddene i følgen $\{z_n\}$ tilfredsstiller

$$z_{n+1} = cz_n + d \qquad \text{for } n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Vis at $z_n = \left(z_0 - \frac{d}{1-c}\right) c^n + \frac{d}{1-c}$.

b) La $\mathbf{u}_n$ være en løsning av ligning (3) i oppgave 2 med $\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 600 \\ 300 \end{pmatrix}$. Forklar at det finnes tall c_n og d_n slik at.

$$\mathbf{u}_n = c_n \mathbf{v}_1 + d_n \mathbf{v}_2$$

c) La a_1 og a_2 være tallene slik at $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1600 \\ 400 \end{pmatrix} = a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2$ (husk oppgave 2c). Vis at $c_{n+1} = \lambda_1 c_n + a_1$ og $d_{n+1} = \lambda_2 d_n + a_2$, . Finn uttrykk for x_n og y_n og beregn $\lim_{n\to\infty} x_n$ og $\lim_{n\to\infty} y_n$.

LYKKE TIL!