Fasit til utvalgte oppgaver MAT1110, uka 8-12/2

Øyvind Ryan (oyvindry@ifi.uio.no)

February 10, 2010

Oppgave 3.3.6

Vi har funksjonen $f(x, y, z) = xyz$ og kurven

$$\mathbf{r}(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}t),\ 0 \leq t \leq 1.$$

Vi ser at

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(t) &= (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}) \\
v(t) &= \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} = e^t + e^{-t} \\
f(\mathbf{r}(t)) &= -\sqrt{2}t.
\end{aligned}$$

Vi får derfor

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} f ds &= \int_0^1 f(\mathbf{r}(t))v(t)dt \\
&= \int_0^1 -\sqrt{2}t\left(e^t + e^{-t}\right)dt \\
&= \left[\sqrt{2}t\left(-e^t + e^{-t}\right)\right]_0^1 + \int_0^1 \sqrt{2}\left(e^t - e^{-t}\right)dt \\
&= \sqrt{2}\left(-e + e^{-1}\right) + \left[\sqrt{2}\left(e^t + e^{-t}\right)\right]_0^1 \\
&= \sqrt{2}\left(-e + e^{-1}\right) + \sqrt{2}\left(e + e^{-1}\right) - 2\sqrt{2} \\
&= 2\sqrt{2}\left(e^{-1} - 1\right).
\end{aligned}$$

hvor vi har brukt delvis integrasjon.

Oppgave 3.3.10

Vi har den parametriserte kurven $\mathcal{C}$ gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \left(2t - t^2, \frac{8}{3}t^{3/2}\right),\ 0 \leq t \leq 1$$

Funksjonen som beskriver utbyggingskostnadene er gitt ved

$$p(x, y) = K(10 + y),$$

der K er en gitt konstant. Vi har nå at

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= \left(2 - 2t, 4t^{1/2}\right) \\
v(t) &= \sqrt{(2-2t)^2 + 16t} = \sqrt{4 - 8t + 4t^2 + 16t} \\
&= \sqrt{4 + 8t + 4t^2} = 2 + 2t \\
p(\mathbf{r}(t)) &= K(10 + \frac{8}{3}t^{3/2}).
\end{aligned}$$

De totale utbyggingskostnadene blir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} p ds &= \int_0^1 p(\mathbf{r}(t))v(t)dt \\
&= \int_0^1 K(10+\frac{8}{3}t^{3/2})(2+2t)dt \\
&= K\int_0^1 (20+20t+\frac{16}{3}t^{3/2}+\frac{16}{3}t^{5/2})dt \\
&= K[20t+10t^2+\frac{32}{15}t^{5/2}+\frac{32}{21}t^{7/2}]_0^1 \\
&= K(20+10+\frac{32}{15}+\frac{32}{21}) = K\frac{3150+224+160}{105} = \frac{3534}{105}K \approx 33.7K.
\end{aligned}$$

Oppgave 3.3.11

Vi har den parametriserte kurven

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{9}t^{3/2}, \frac{t}{9}\right), \ 1 \le t \le 7$$

Vi har at

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= \left(t, \frac{\sqrt{2}}{3}t^{1/2}, \frac{1}{9}\right) \\
v(t) &= \sqrt{t^2+\frac{2}{9}t+\frac{1}{81}} = \left|t+\frac{1}{9}\right| = t+\frac{1}{9},
\end{aligned}$$

hvor vi kunne fjerne absoluttverditegnet siden $1 \le t \le 7$. Bensinforbruket f til en bil er gitt ved $\frac{1}{15}+\frac{1}{2}\frac{dz}{ds}$. Dette er en litt spesiell form, og vi vil helst regne ut $\frac{dz}{ds}$ uten å måtte uttrykke z som en funksjon av s. Setter vi inn $v(t)=\frac{ds}{dt}=t+\frac{1}{9}$ og $\frac{dz}{dt}=\frac{1}{9}$ i uttrykket

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{ds}\frac{ds}{dt}$$

som vi har fra kjerneregelen, får vi at $\frac{1}{9} = \frac{dz}{ds}\left(t+\frac{1}{9}\right)$, altså er

$$\frac{dz}{ds} = \frac{1}{9t+1}.$$

Vi får da

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} f ds &= \int_1^7 \left(\frac{1}{15}+\frac{1}{2}\frac{1}{9t+1}\right)\left(t+\frac{1}{9}\right)dt \\
&= \int_1^7 \left(\frac{1}{15}t+\frac{1}{135}+\frac{1}{18}\right)dt \\
&= \left[\frac{1}{30}t^2+\left(\frac{1}{135}+\frac{1}{18}\right)t\right]_1^7 \\
&= \frac{1}{30}\times 48\left(\frac{1}{135}+\frac{1}{18}\right)\times 6 \\
&= \frac{8}{5}+\frac{2}{45}+\frac{1}{3} = \frac{72+2+15}{45} = \frac{89}{45}.
\end{aligned}$$

Oppgave 3.4.2

Vi har $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, xy)$, og kurven $\mathcal{C}$ parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, -\sin t),\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Vi har at

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= (\cos^2 t, -\sin t \cos t) \\ \mathbf{r}'(t) &= (-\sin t, \cos t), \end{aligned}$$

og får derfor

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot dr &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t, -\sin t \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin t \cos^2 t + \sin t \cos^2 t) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Oppgave 3.4.3

Vi har $\mathbf{F}(x,y,z) = (zy, x^2, xz)$, og kurven $\mathcal{C}$ parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3),\ 0 \leq t \leq 2.$$

Vi har at

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= (t^5, t^2, t^4) \\ \mathbf{r}'(t) &= (1, 2t, 3t^2), \end{aligned}$$

og får derfor

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot dr &= \int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^2 (t^5, t^2, t^4) \cdot (1, 2t, 3t^2) dt = \int_0^2 (t^5 + 2t^3 + 3t^6) dt \\ &= \left[\frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{3}{7}t^7\right]_0^2 = \frac{64}{6} + 8 + \frac{384}{7} = \frac{224 + 168 + 1152}{21} = \frac{1544}{21}. \end{aligned}$$

Oppgave 3.4.4

Vi har $\mathbf{F}(x,y,z) = (\frac{z}{x}, y, x)$, og kurven $\mathcal{C}$ parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (e^t, \ln t, \sin t),\ 1 \leq t \leq 2.$$

Vi har at

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= (e^{-t} \sin t, \ln t, e^t) \\ \mathbf{r}'(t) &= (e^t, \frac{1}{t}, \cos t), \end{aligned}$$

og får derfor

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot dr &= \int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)dt \\
&= \int_1^2 (e^{-t}\sin t, \ln t, e^t)\cdot(e^t, \frac{1}{t}, \cos t)dt \\
&= \int_1^2 \left(\sin t + \frac{\ln t}{t} + e^t\cos t\right) \\
&= [-\cos t]_1^2 + \int_1^2 \frac{\ln t}{t}dt + \int_1^2 e^t\cos t dt \\
&= \cos 1 - \cos 2 + \int_1^2 \frac{\ln t}{t}dt + \int_1^2 e^t \cos t dt.
\end{aligned}$$

Det første av de gjenværendene integralene kan vi finne ved hjelp av substitusjonen $u = \ln t$, som gir $du = \frac{dt}{t}$. Det første integralet blir derfor

$$\int_{\ln 1}^{\ln 2} u du = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}(\ln 2)^2.$$

det andre integralet finner vi ved to ganger delvis integrasjon:

$$\int e^t\cos t dt = e^t\cos t + \int e^t \sin t dt = e^t\cos t + e^t\sin t - \int e^t\cos t dt.$$

Samler vi integralene her finner vi at $\int e^t\cos t dt = \frac{1}{2}e^t(\sin t + \cos t)$, som gjør at det tredje integralet blir

$$\int_1^2 e^t\cos t dt = \left[\frac{1}{2}e^t(\sin t + \cos t)\right]_1^2 = \frac{1}{2}e^2(\sin 2 + \cos 2) - \frac{1}{2}e(\sin 1 + \cos 1).$$

Summen av det hele blir derfor

$$\cos 1 - \cos 2 + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \frac{1}{2}e^2(\sin 2 + \cos 2) - \frac{1}{2}e(\sin 1 + \cos 1).$$

Oppgave 3.4.6

Vi har $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y)$, og kurven $\mathcal{C}$ kan parametriseres ved

$$\mathbf{r}(t) = (5\cos t, 5\sin t),\ 0 \le t \le 2\pi.$$

Vi har at

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= (5\cos t, 5\sin t) \\
\mathbf{r}'(t) &= (-5\sin t, 5\cos t),
\end{aligned}$$

og får derfor

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot dr &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} (5\cos t, 5\sin t)\cdot(-5\sin t, 5\cos t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} -25\sin t\cos t + 25\sin t\cos t = 0.
\end{aligned}$$

Oppgave 3.4.8

Vi har $\mathbf{F}(x,y,z) = (\cos x \sin y, x)$, og kurven $\mathcal{C}$ kan parametriseres ved hjelp av tre kurver $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$, hvor hver av disse igjen er parametrisert ved

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1(t) &= (t,0),\ 0 \leq t \leq \pi \\
\mathbf{r}_2(t) &= (\pi,t),\ 0 \leq t \leq \pi \\
\mathbf{r}_3(t) &= (\pi - t, \pi - t),\ 0 \leq t \leq \pi.
\end{aligned}$$

Vi har at

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) &= (0,t) \\
\mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t)) &= (-\sin t, \pi) \\
\mathbf{F}(\mathbf{r}_3(t)) &= (\cos(\pi - t)\sin(\pi - t), \pi - t) \\
&= (-\cos t \sin st, \pi - t) \\
\mathbf{r}_1'(t) &= (1,0) \\
\mathbf{r}_2'(t) &= (0,1) \\
\mathbf{r}_3'(t) &= (-1,-1)
\end{aligned}$$

og får derfor

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot dr &= \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot dr + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot dr + \int_{\mathcal{C}_3} \mathbf{F} \cdot dr \\
&= \int_0^\pi \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \mathbf{r}_1'(t)dt + \int_0^\pi \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t)) \cdot \mathbf{r}_2'(t)dt + \int_0^\pi \mathbf{F}(\mathbf{r}_3(t)) \cdot \mathbf{r}_3'(t)dt \\
&= \int_0^\pi \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \mathbf{r}_1'(t) + \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t)) \cdot \mathbf{r}_2'(t) + \mathbf{F}(\mathbf{r}_3(t)) \cdot \mathbf{r}_3'(t)dt \\
&= \int_0^\pi (0 + \pi + \cos t \sin t - \pi + t)dt \\
&= \int_0^\pi (\frac{1}{2}\sin(2t) + t)dt = [-\frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{2}t^2]_0^\pi \\
&= -\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{2}.
\end{aligned}$$

Oppgave 3.4.14

Retningen til trekkraften er $(20-t, 5)$. Enhetsvektoren i denne retningen er $\left(\frac{20-t}{\sqrt{(20-t)^2+25}}, \frac{5}{\sqrt{(20-t)^2+25}}\right)$. Siden trekkraften er konstant lik K, så blir kraftvektoren lik

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \left(\frac{K(20-t)}{\sqrt{(20-t)^2+25}}, \frac{5K}{\sqrt{(20-t)^2+25}}\right),$$

der strekningen båten dras er parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = (t,0)$, $0 \leq t \leq 20$. Arbeidet som kraften utfører blir da

$$\begin{aligned}
\int_0^{20} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt &= \int_0^{20} \frac{K(20-t)}{\sqrt{(20-t)^2+25}}dt \\
&= K\int_0^{20} \frac{20-t}{\sqrt{(20-t)^2+25}}dt.
\end{aligned}$$

Vi substituerer $u = (20-t)^2 + 25$, og får $du = -2(20-t)dt$, slik at integralet blir

$$K\int_{425}^{25} -\frac{1}{2\sqrt{u}}du = K\int_{25}^{425} \frac{1}{2\sqrt{u}}du = K\left[\sqrt{u}\right]_{25}^{425} = K(\sqrt{425} - 5) = 5K(\sqrt{17} - 1).$$

Oppgave 3.4.15

a)

Trekkraften som virker på lasten har retning fra lasten mot taljen. Denne vektoren er $(1,1)-(t,t^2)=(1-t,1-t^2)$. Lengden til denne vektoren er

$$\begin{aligned}
\sqrt{(1-t)^2+(1-t^2)^2)} &= \sqrt{(1-t)^2+(1-t)^2(1+t)^2} \\
&= (1-t)\sqrt{1+(1+t)^2} \\
&= (1-t)\sqrt{2+2t+t^2}
\end{aligned}$$

Enhetsvektoren i trekkretningen er derfor

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-t)\sqrt{2+2t+t^2}}(1-t,1-t^2) &= \frac{1-t}{(1-t)\sqrt{2+2t+t^2}}(1,1+t) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2+2t+t^2}}(1,1+t)
\end{aligned}$$

Siden trekkraften er konstant lik K i trekkretningen er blir derfor trekkraften lik

$$\mathbf{K}(t)=\frac{K}{\sqrt{2+2t+t^2}}(1,1+t).$$

b)

Siden $\mathbf{r}(t)=(t,t^2)$ blir $\mathbf{r}'(t)=(1,2t)$. Arbeidet blir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \mathbf{K}\cdot dr &= \int_0^1 \mathbf{K}(t)\cdot\mathbf{r}'(t)dt \\
&= \int_0^1 \frac{K}{\sqrt{2+2t+t^2}}(1,1+t)\cdot(1,2t)dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{K}{\sqrt{2+2t+t^2}}+\frac{2Kt(1+t)}{\sqrt{2+2t+t^2}}\right)dt \\
&= K\int_0^1 \frac{1+2t+2t^2}{\sqrt{2+2t+t^2}}dt.
\end{aligned}$$

c)

Vi har at

$$\begin{aligned}
((t-1)\sqrt{t^2+2t+2})' &= \sqrt{t^2+2t+2}+\frac{(t-1)(2t+2)}{2\sqrt{t^2+2t+2}} \\
&= \frac{t^2+2t+2+(t-1)(t+1)}{\sqrt{t^2+2t+2}} \\
&= \frac{2t^2+2t+1}{\sqrt{t^2+2t+2}}.
\end{aligned}$$

Det siste kjenner vi igjen fra integranden i b).

d)

Vi ser nå at

$$W=K\left[(t-1)\sqrt{t^2+2t+2}\right]_0^1=K\sqrt{2}.$$

Oppgave 3.5.1

Vi ser på $\mathbf{F}(x,y) = (2xy + 2x, x^2)$, og regner ut at $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x$. Feltet er derfor konservativt, og vi finner en potensialfunksjon ved å løse

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= F_1(x,y) = 2xy + 2x \\
\frac{\partial \phi}{\partial y} &= F_2(x,y) = x^2.
\end{aligned}$$

Den første ligningen gir at $\phi(x,y) = x^2 y + x^2 + C(y)$, den andre gir at $\phi(x,y) = x^2 y + D(x)$. det er da klart at $\phi(x,y) = x^2 y + x^2$ er en potensialfunksjon.

Oppgave 3.5.2

Vi ser på $\mathbf{F}(x,y) = (2xe^y, x^2 e^y + x)$, og regner ut at $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2xe^y + 1$, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2xe^y$. Siden disse er forskjellige er ikke vektorfeltet konservativt, og F har da ingen potensialfunksjon.

Oppgave 3.5.4

Vi ser på $F(x,y,z) = (y^2 z + z, 2xyz - 2, xy^2 + x)$, og regner ut
$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2yz$, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2yz$,
$\frac{\partial F_2}{\partial z} = 2xy$, $\frac{\partial F_3}{\partial y} = 2xy$,
$\frac{\partial F_1}{\partial z} = y^2 + 1$, $\frac{\partial F_3}{\partial x} = y^2 + 1$.
Feltet er derfor konservativt, og vi må løse ligningene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= F_1(x,y) = y^2 z + z \\
\frac{\partial \phi}{\partial y} &= F_2(x,y) = 2xyz - 2 \\
\frac{\partial \phi}{\partial z} &= F_3(x,y) = xy^2 + x.
\end{aligned}$$

for å finne en potensialfunksjon. Løser vi disse tre finner vi at

$$\begin{aligned}
\phi(x,y,z) &= y^2 zx + zx + C(y,z) \\
&= xy^2 z - 2y + D(x,z) \\
&= xy^2 z + xz + E(x,y).
\end{aligned}$$

Vi ser da at

$$\phi(x,y,z) = xy^2 z - 2y + xz.$$

er en potensialfunksjon.

Oppgave 3.5.7

Vi har vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y) = (2xy, x^2)$, og kurven $\mathcal{C}$ parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (2t\cos t, \sin t),\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Det er tungvint å regne ut $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ direkte. I stedet forsøker vi å finne en potensialfunksjon. Vi regner ut

$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x$.
Felter er derfor konservativt, og har en potensialfunksjon . Vi må løse ligningene

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x} &= F_1(x,y) = 2xy \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= F_2(x,y) = x^2\end{aligned}$$

$\phi(x,y) = x^2y$ er derfor en potensialfunksjon for F. Vi har derfor

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot dr = \int_{\mathcal{C}} \bigtriangledown\phi dr = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}) = \phi(0,1) - \phi(0,0) = 0,$$

hvor vi har brukt setning 3.5.1.

Oppgave 3.5.8

Vi har vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y) = (\cos(xy) - xy\sin(xy), -x^2\sin(xy))$, og kurven $\mathcal{C}$ parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (-t\cos t, \sin t - \cos t),\ 0 \leq t \leq \pi.$$

Vi regner ut

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_2}{\partial x} &= -2x\sin(xy) - x^2y\cos(xy) \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} &= -x\sin(xy) - x\sin(xy) - x^2y\cos(xy) = -2x\sin(xy) - x^2y\cos(xy),\end{aligned}$$

som viser at feltet er konservativt. For å finne en potensialfunksjon må vi løse

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x} &= F_1(x,y) = \cos(xy) - xy\sin(xy) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= F_2(x,y) = -x^2\sin(xy).\end{aligned}$$

Den siste er enklest, og gir oss at $\phi(x,y) = x\cos(xy) + C(x)$. Den første løser vi slik:

$$\begin{aligned}\phi(x,y) &= \frac{1}{y}\sin(xy) - y\int x\sin(xy)dx \\ &= \frac{1}{y}\sin(xy) + x\cos(xy) - \int \cos(xy)dx \\ &= \frac{1}{y}\sin(xy) + x\cos(xy) - \frac{1}{y}\sin(xy) + C(y) \\ &= x\cos(xy) + C(y).\end{aligned}$$

Vi ser derfor at $\phi(x,y) = x\cos(xy)$ er en potensialfunksjon. Vi har derfor

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \bigtriangledown\phi d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}) = \phi(\pi,1) - \phi(0,-1) = -\pi.$$

Oppgave 3.5.10

Vi har vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2z + 2xy, 2xyz + x^2, xy^2 + 1)$, og kurven $\mathcal{C}$ parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = \left(t, t^2, t\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right),\ 0 \leq t \leq 1.$$

Vi regner ut

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_2}{\partial x} &= 2yz + 2x \\
\frac{\partial F_1}{\partial y} &= 2yz + 2x \\
\frac{\partial F_3}{\partial x} &= y^2 \\
\frac{\partial F_1}{\partial z} &= y^2 \\
\frac{\partial F_2}{\partial z} &= 2xy \\
\frac{\partial F_3}{\partial y} &= 2xy,
\end{aligned}
$$

som viser at feltet er konservativt. For å finne en potensialfunksjon må vi løse

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= F_1(x,y,z) = y^2 z + 2xy \\
\frac{\partial \phi}{\partial y} &= F_2(x,y,z) = 2xyz + x^2 \\
\frac{\partial \phi}{\partial z} &= F_3(x,y,z) = xy^2 + 1.
\end{aligned}
$$

Disse tre gir

$$
\begin{aligned}
\phi(x,y,z) &= y^2 zx + x^2 y + C(y,z) \\
\phi(x,y,z) &= xy^2 z + x^2 y + C(x,z) \\
\phi(x,y,z) &= xy^2 z + z + C(x,y).
\end{aligned}
$$

Vi ser derfor at $\phi(x,y,z) = xy^2 z + x^2 y + z$ er en potensialfunksjon. Vi har derfor

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \triangledown \phi d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}) = \phi(1,1,1) - \phi(0,0,0) = 3.$$

Matlab-kode

```
% Oppgave 9.1
a=zeros(1,30);
a(1) = 1;
a(2) = 3;
for k=3:30
  a(k) = 3*a(k-1)-2*a(k-2);
end
```

```
% Oppgave 9.2
x=zeros(1,1000);
y=zeros(1,1000);
r=0.98;
q=1.04;
c=0.0002;
d=0.001;
x(1)=50;
```

```
y(1)=200;
for k=2:1000
  x(k) = x(k-1)*(r+c*y(k-1));
  y(k) = y(k-1)*(q-d*x(k-1));
end
plot(1:1000,x,1:1000,y)
```

Python-kode

```
# Oppgave 9.1
a=zeros(30)
a[0]=1
a[1]=3
for n in range(0,28):
    a[n+2]=3*a[n+1]-2*a[n]
```

```
# Oppgave 9.2 b)
r=0.98
q=1.04
c=0.0002
d=0.001
x=zeros(1001)
y=zeros(1001)
x[0]=50
y[0]=200
for n in range(0,999):
    x[n+1]=x[n]*(r+c*y[n])
    y[n+1]=y[n]*(q-d*x[n])
t=range(0,1001,1)
plot(t,x,'g')
hold('on')
plot(t,y,'r')
```