Fasit til utvalgte oppgaver MAT1110, uka 22-26/2

Øyvind Ryan (oyvindry@ifi.uio.no)

February 25, 2010

Oppgave 6.1.1 a)

$$
\begin{aligned}
\int\int_R xydxdy &= \int_2^4 \int_1^2 xydxdy \\
&= \int_2^4 \left[\frac{1}{2}x^2y\right]_1^2 dy \\
&= \int_2^4 \left(2y - \frac{1}{2}y\right) dy = \int_2^4 \frac{3}{2}ydy \\
&= \left[\frac{3}{4}y^2\right]_2^4 = 12 - 3 = 9.
\end{aligned}
$$

Oppgave 6.1.1 b)

$$
\begin{aligned}
\int\int_R (x+\sin y)dxdy &= \int_0^\pi \int_0^1 (x+\sin y)dxdy \\
&= \int_0^\pi \left[\frac{1}{2}x^2 + x\sin y\right]_0^1 dy \\
&= \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \sin y\right) dy \\
&= \left[\frac{1}{2}y - \cos y\right]_0^\pi \\
&= \frac{\pi}{2} + 1 + 1 = 2 + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Oppgave 6.1.1 d)

$$
\begin{aligned}
\int\int_R x\cos(xy)dxdy &= \int_1^2 \int_\pi^{2\pi} x\cos(xy)dydx \\
&= \int_1^2 [\sin(xy)]_\pi^{2\pi} dx \\
&= \int_1^2 (\sin(2\pi x) - \sin(\pi x))dx \\
&= \left[-\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi x) + \frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_1^2 \\
&= -\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}
$$

Oppgave 6.1.1 g)

Dette integralet blir enklere hvis vi bytter om integrasjonsrekkefølgen (Teorem 6.1.7). Vi får da

$$
\begin{aligned}
\int\int_R \frac{1}{1+x^2y}dxdy &= \int_0^1\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2y}dxdy \\
&= \int_1^{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2y}dydx \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} \left[\frac{\ln(1+x^2y)}{x^2}\right]_0^1 dx \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx \\
&= \left[-\frac{\ln(1+x^2)}{x}\right]_1^{\sqrt{3}} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{(1+x^2)x}dx \\
&= -\frac{\ln 4}{\sqrt{3}} + \ln 2 + [2\arctan x]_1^{\sqrt{3}} \\
&= -\frac{2\sqrt{3}\ln 2}{3} + \ln 2 + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \\
&= \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\ln 2 + \frac{\pi}{6},
\end{aligned}
$$

der vi har brukt delvis integrasjon.

Oppgave 6.1.3

Det er dessverre ganske omstendelig å sette opp løsningen for denne oppgaven, da vi må først må definere delepunkter, rektangler, maksimum, og minimum for tre forskjellige partisjoner. La

- Π_1 ha delepunkter (x_{1i}, y_{1j}) $(0 \leq i \leq n_1,\ 0 \leq j \leq m_1)$ der $a = x_{10} \leq \cdots \leq x_{1n_1} = b$, $c = y_{10} \leq \cdots \leq y_{1m_1} = d$.
- De tilsvarende rektanglene kan vi kalle R_{1ij}.
- Vi skriver og $m_{1ij} = \inf\{f(x,y)|(x,y) \in R_{1ij}\}$, $M_{1ij} = \sup\{f(x,y)|(x,y) \in R_{1ij}\}$.

La og

- Π_2 ha delepunkter (x_{2i}, y_{2j}) $(0 \leq i \leq n_2,\ 0 \leq j \leq m_2)$ der $a = x_{20} \leq \cdots \leq x_{2n_2} = b$, og $c = y_{20} \leq \cdots \leq y_{2m_2} = d$.
- De tilsvarende rektanglene kan vi kalle R_{2ij}.
- Vi skriver $m_{2ij} = \inf\{f(x,y)|(x,y) \in R_{2ij}\}$, $M_{2ij} = \sup\{f(x,y)|(x,y) \in R_{2ij}\}$.

La og Π være partisjonen som inneholder alle delepunktene til Π_1 og Π_2. La

- Π ha delepunkter (x_i, y_j) $(0 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq m)$ der $a = x_0 \leq \cdots \leq x_n = b$, og $c = y_0 \leq \cdots \leq y_m = d$.
- De tilsvarende rektanglene kan vi kalle R_{ij}.

- Vi skriver $m_{ij} = \inf\{f(x,y)|(x,y) \in R_{ij}\}$, $M_{ij} = \sup\{f(x,y)|(x,y) \in R_{ij}\}$.

Det er klart at hvert rektangel R_{1ij} kan skrives som en union av endelig mange R_{ij}, det vil si

$$R_{1ij} = R_{i_1 j_1} \cup \cdots \cup R_{i_k j_k}$$

Da er $R_{1ij} = |R_{i_1 j_1}| + \cdots + |R_{i_k j_k}|$, og siden $m_{1ij} \leq m_{i_r j_r}$ for alle r, så har vi

$$m_{1ij}|R_{1ij}| = \sum_{r=1}^{k} m_{1ij}|R_{i_k j_k}| \leq \sum_{r=1}^{k} m_{i_r j_r}|R_{i_k j_k}|.$$

Summerer vi over alle i, j ovenfor får vi

$$N(\Pi_1) = \sum_{ij} m_{1ij}|R_{1ij}| \leq \sum m_{ij}|R_{ij|}| = N(\Pi).$$

Dette er den første ulikheten vi skulle vise. Den andre, $N(\Pi) \leq Ø(\Pi)$, vet vi allerede, siden minimum m_{ij} alltid er mindre enn maksimum M_{ij}.

Den siste ulikheten følger på en helt tilsvarende måte: Hvert rektangel R_{2ij} kan skrives som en union av endelig mange R_{ij}, det vil si

$$R_{2ij} = R_{i_1 j_1} \cup \cdots \cup R_{i_k j_k}$$

Da er $R_{2ij} = |R_{i_1 j_1}| + \cdots + |R_{i_k j_k}|$, og siden $M_{2ij} \geq M_{i_r j_r}$ for alle r, så har vi

$$M_{2ij}|R_{2ij}| = \sum_{r=1}^{k} M_{2ij}|R_{i_k j_k}| \geq \sum_{r=1}^{k} M_{i_r j_r}|R_{i_k j_k}|.$$

Summerer vi over alle i, j ovenfor får vi

$$Ø(\Pi_2) = \sum_{ij} M_{2ij}|R_{2ij}| \geq \sum M_{ij}|R_{ij|}| = Ø(\Pi).$$

Dette er den siste ulikheten vi skulle vise.

Oppgave 6.1.4

Anta f er integrerbar over R. Da finnes det to partisjoner Π_1, Π_2 slik at

$$\begin{aligned} N(\Pi_1) &\geq \underline{\int\int_R} f(x,y)dxdy - \frac{\epsilon}{2} &= \int_R f(x,y)dxdy - \frac{\epsilon}{2} \\ Ø(\Pi_2) &\leq \overline{\int\int_R} f(x,y)dxdy + \frac{\epsilon}{2} &= \int_R f(x,y)dxdy + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Fra oppgave 6.1.3 vet vi at det finnes en partisjon Π slik at $N(\Pi_1) \leq N(\Pi) \leq Ø(\Pi) \leq Ø(\Pi_2)$. Men da er

$$\begin{aligned} Ø(\Pi) - N(\Pi) &\leq Ø(\Pi_2) - N(\Pi_1) \\ &\leq \int_R f(x,y)dxdy + \frac{\epsilon}{2} - (\int_R f(x,y)dxdy - \frac{\epsilon}{2}) \\ &= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

som var det vi skulle vise. Den andre veien, hvis $Ø(\Pi) - N(\Pi) \leq \epsilon$ så vil $Ø(\Pi) \leq N(\Pi) + \epsilon$. Da vil også

$$\overline{\int\int_R} f(x,y)dxdy \leq Ø(\Pi) \leq N(\Pi) + \epsilon \leq \underline{\int\int_R} f(x,y)dxdy + \epsilon.$$

Altså har vi at

$$\overline{\int\int_R} f(x,y)dxdy \leq \underline{\int\int_R} f(x,y)dxdy + \epsilon.$$

Siden dette gjelder for alle ϵ, så har vi at

$$\overline{\int\int_R} f(x,y)dxdy \leq \underline{\int\int_R} f(x,y)dxdy.$$

Siden også

$$\underline{\int\int_R} f(x,y)dxdy \leq \overline{\int\int_R} f(x,y)dxdy,$$

så har vi at

$$\underline{\int\int_R} f(x,y)dxdy = \overline{\int\int_R} f(x,y)dxdy,$$

og derfor er f integrerbar.

Oppgave 6.1.7

La $m = \min_{(x,y)\in R} f(x,y)$, $M = \max_{(x,y)\in R} f(x,y)$. Det er da klart at

$$m|R| \leq \int\int_R f(x,y)dxdy \leq M|R|,$$

slik at $m \leq \frac{\int\int_R f(x,y)dxdy}{|R|} \leq M$. Men en kontinuerlig funksjon antar alle verdier mellom maksimum og minimum. Siden $\frac{\int\int_R f(x,y)dxdy}{|R|}$ er en slik verdi, følger det at det finnes et punkt$(\bar{x},\bar{y})$ slik at

$$f(\bar{x},\bar{y}) = \frac{\int\int_R f(x,y)dxdy}{|R|}.$$

Oppgave 6.2.1 a)

$$\begin{aligned}
\int\int_R x^2 y dxdy &= \int_0^2 \int_0^x x^2 y dy dx \\
&= \int_0^2 \left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_0^x dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^4 dx \\
&= \left[\frac{1}{10}x^5\right]_0^2 = \frac{16}{5}.
\end{aligned}$$

Oppgave 6.2.1 b)

$$\begin{aligned}
\int\int_R (x+2xy)dxdy &= \int_0^3 \int_x^{2x+1} (x+2xy)dydx \\
&= \int_0^3 \left[xy+xy^2\right]_x^{2x+1} dx \\
&= \int_0^3 \left(x(2x+1)+x(2x+1)^2-x^2-x^3\right) dx \\
&= \int_0^3 \left(2x^2+x+4x^3+4x^2+x-x^2-x^3\right) dx \\
&= \int_0^3 \left(3x^3+5x^2+2x\right) dx \\
&= \left[\frac{3}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3+x^2\right]_0^3 = \frac{243}{4}+45+9 = \frac{459}{4}.
\end{aligned}$$

Oppgave 6.2.1 d)

$$\begin{aligned}
\int\int_R x\cos y dxdy &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin y} x\cos y dxdy \\
&= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{2}x^2\cos y\right]_0^{\sin y} dy = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\sin^2 y\cos y dy \\
&= \left[\frac{1}{6}\sin^3 y\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Oppgave 6.2.1 f)

Skjæringspunktene mellom $y = x^2$ $y = \sqrt{x}$ er $(0,0)$ og $(1,1)$. For $0 \le x \le 1$ er $x^2 \le \sqrt{x}$. Derfor får vi

$$\begin{aligned}
\int\int_R x^2 ydxdy &= \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2 ydydx \\
&= \int_0^1\left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^6\right)dx \\
&= \left[\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{14}x^7\right]_0^1 = \frac{1}{8}-\frac{1}{14} = \frac{7-4}{56} = \frac{3}{56}.
\end{aligned}$$

Oppgave 6.2.3

a)

$$\begin{aligned}
\int_0^1\left[\int_y^1 e^{x^2}dx\right]dy &= \int_0^1\left[\int_0^x e^{x^2}dy\right]dx \\
&= \int_0^1 xe^{x^2}dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e-1).
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\left[\int_x^{\pi/2}\frac{\sin y}{y}dy\right]dx &= \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{y}\frac{\sin y}{y}dx\right]dy\\ &= \int_0^{\pi/2}\left[x\frac{\sin y}{y}\right]_0^y dy\\ &= \int_0^{\pi/2}\sin y dy = [-\cos y]_0^{\pi/2} = 1.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int_0^{1}\left[\int_{\sqrt{x}}^{1}e^{\frac{x}{y^2}}dy\right]dx &= \int_0^{1}\left[\int_0^{y^2}e^{\frac{x}{y^2}}dx\right]dy\\ &= \int_0^{1}\left[y^2e^{\frac{x}{y^2}}\right]_0^{y^2} dy\\ &= \int_0^{1}\left(y^2e-y^2\right)dy = \int_0^1(e-1)y^2dy\\ &= \left[\frac{1}{3}(e-1)y^3\right]_0^1 = \frac{e-1}{3}.\end{aligned}$$

Matlab-kode

```
% Oppgave 3.9.12
u=linspace(0,2*pi,100);
v=linspace(0,2,100);
[U,V]=meshgrid(u,v);
x=3*cos(U);
y=3*sin(U);
z=V;
surf(x,y,z)
axis('equal')
title('Oppgave 3.9.12')

a=1;
b=0.5;
c=0.1;
u=linspace(0,2*pi,100);
v=linspace(0,pi,100);
[U,V]=meshgrid(u,v);
x=sin(V).*cos(U)*a;
y=sin(V).*sin(U)*b;
z=cos(V)*c;
surf(x,y,z)
axis('equal')
title('Oppgave 3.9.12')
```

```
% Oppgave 3.9.13
r=3;
R=5;
u=linspace(0,2*pi,100);
v=linspace(0,2*pi,100);
```

```
[theta,phi]=meshgrid(u,v);
x=(5+3*cos(phi))*cos(theta);
y=(5+3*cos(phi))*sin(theta);
z=3*sin(phi);
surf(x,y,z)
title('Oppgave 3.9.13')
```

```
% Oppgave 6.1.2
% a)
% Integraler kan regnes ut på flere måter i Matlab.
% De fire eksemplene nedenfor returnerer alle samme svar
dblquad( @(x,y)x.*y ,1,2,2,4) % Ved hjelp av anonym funksjon
dblquad('x.*y',1,2,2,4)       % Samme som over, men enklere syntaks.
f=inline('x.*y');
dblquad(f,1,2,2,4)            % Ved hjelp av linjefunksjon

% Symbolsk kan vi regne ut integralet slik
syms x y
uttrykk1=int('x*y','x',1,2)
uttrykk2=int(uttrykk1,'y',2,4)
eval(uttrykk2)

% b)
dblquad(@(x,y)x+sin(y),0,1,0,pi)

% c)
dblquad(@(x,y)x.^2.*exp(y),-1,1,0,1)

% d)
dblquad(@(x,y)x.*cos(x.*y),1,2,pi,2*pi)

% e)
dblquad(@(x,y)x.*y.*exp((x.^2).*y),0,2,1,2)

% f)
dblquad(@(x,y)log(x.*y),1,e,1,e)

% g)
dblquad(@(x,y)1./(1+(x.^2).*y),1,sqrt(3),0,1)
```

```
% Oppgave 6.2.2 a)
dblquad(@(x,y)(x.^2).*y .*(y<=x) ,0,2,0,2)

% Dette kan også regnes ut symbolsk
syms x y
uttrykk1=int('x^2*y','y',0,x);
uttrykk2=int(uttrykk1,'x',0,2);
eval(uttrykk2)

% Oppgave 6.2.2 b)
dblquad(@(x,y)(x+2*x.*y).*(x<=y).*(y<=(2*x+1)),0,3,0,7)

% Oppgave 6.2.2 c)
dblquad(@(x,y)y.*(y<=x).*(x<=y.^2),1,4,1,2)

% Oppgave 6.2.2 d)
dblquad(@(x,y)(x.*cos(y)).*(x<=sin(y)),0,1,0,pi/2)

% Oppgave 6.2.2 e)
```

```
dblquad(@(x,y)exp(x.^2).*(y<=x),0,1,0,1)

% Oppgave 6.2.2 f)
dblquad(@(x,y)(x.^2).*y.*(y<=sqrt(x)).*(x.^2<=y),0,1,0,1)

% Oppgave 6.2.2 g)
dblquad(@(x,y)x.*cos(x+y).*(y<=x),0,pi,0,pi)

% Oppgave 6.2.2 h)
dblquad(@(x,y)(y<=sin(x))./sqrt(1-y.^2),0,pi/2,0,1)
pi^2/8

% Oppgave 6.2.2 i)
dblquad(@(x,y)x.*(((x-1)./(exp(1)-1))<=y).*(y<=log(x)),1,exp(1),0,1)
```

Python-kode

```
# Oppgave 3.9.12
u=linspace(0,2*pi,100)
v=linspace(0,2,100)
U,V=meshgrid(u,v,sparse=False,indexing='ij')
x=3*cos(U)
y=3*sin(U)
z=V
surf(x,y,z)
axis('equal')
title('Oppgave 3.9.12')
```

```
# Oppgave 3.9.13
a=1.0
b=0.5
c=0.1
u=linspace(0,2*pi,100)
v=linspace(0,pi,100)
[U,V]=meshgrid(u,v,sparse=False,indexing='ij')
x=sin(V)*cos(U)*a
y=sin(V)*sin(U)*b
z=cos(V)*c
surf(x,y,z)
axis('equal')
title('Oppgave 3.9.13')
```

```
from integrate2D import *

# Oppgave 6.1.2 a)
print integrate2D(lambda x,y: x*y,1,2,2,4,100,100)

# Oppgave 6.1.2 b)
print integrate2D(lambda x,y: x+sin(y),0,1,0,pi,100,100)

# Oppgave 6.1.2 c)
print integrate2D(lambda x,y: x**2*exp(y),-1,1,0,1,100,100)

# Oppgave 6.1.2 d)
```

```
print integrate2D(lambda x,y: x*cos(x*y),1,2,pi,2*pi,100,100)

# Oppgave 6.1.2 e)
print integrate2D(lambda x,y: x*y*exp((x**2)*y),0,2,1,2,100,100)

# Oppgave 6.1.2 f)
print integrate2D(lambda x,y: log(x*y),1,e,1,e,100,100)

# Oppgave 6.1.2 g)
print integrate2D(lambda x,y: 1/(1+(x**2)*y),1,sqrt(3),0,1,100,100)
```

```
from integrate2D import *

# Oppgave 6.2.2 a)
print integrate2D(lambda x,y: (x**2)*y*(y<=x),0,2,0,2,100,100)

# Oppgave 6.2.2 b)
print integrate2D(lambda x,y: (x+2*x*y)*(x<=y)*(y<=(2*x+1)),0,3,0,7,100,100)

# Oppgave 6.2.2 c)
print integrate2D(lambda x,y: y*(y<=x)*(x<=y**2),1,4,1,2,100,100)

# Oppgave 6.2.2 d)
print integrate2D(lambda x,y: x*cos(y)*(x<=sin(y)),0,1,0,pi/2,100,100)

# Oppgave 6.2.2 e)
print integrate2D(lambda x,y: exp(x**2)*(y<=x),0,1,0,1,100,100)

# Oppgave 6.2.2 f)
print integrate2D(lambda x,y: (x**2)*y*(y<=sqrt(x))*(x**2<=y),0,1,0,1,100,100)

# Oppgave 6.2.2 g)
print integrate2D(lambda x,y: x*cos(x+y)*(y<=x),0,pi,0,pi,100,100)

# Oppgave 6.2.2 h)
print integrate2D(lambda x,y: (y<=sin(x))/sqrt(1-y**2),0,pi/2,0,0.9999,100,100)

# Oppgave 6.2.2 i)
print integrate2D(lambda x,y: x*(((x-1)/(e-1))<=y)*(y<=log(x)),1,e,0,1,100,100)
```