Fasit til utvalgte oppgaver MAT1110, uka 15-19/3

Øyvind Ryan (oyvindry@ifi.uio.no)

March 18, 2010

Oppgave 6.11.3

Kjegleflaten $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$ sier i kulekoordinater at

$$\begin{aligned}
\rho\cos\phi = z &= \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \\
&= \sqrt{\frac{\rho^2\cos^2\theta\sin^2\phi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\phi}{3}} \\
&= \frac{\rho\sin\phi}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Med andre ord er $\tan\phi = \sqrt{3}$, og dermed er $\phi = \frac{\pi}{3}$. Volumet blir dermed

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi/3}\left[\int_0^R \rho^2\sin\phi d\rho\right]d\phi\right]d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi/3}\frac{1}{3}R^3\sin\phi d\phi\right]d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}R^3\cos\phi\right]_0^{\pi/3}d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}R^3 - \frac{1}{6}R^3\right)d\theta \\
&= 2\pi\frac{1}{6}R^3 = \frac{1}{3}\pi R^3.
\end{aligned}$$

Oppgave 6.11.5

Jacobimatrisen til variabelskiftet $(u,v,w) = \mathbf{T}(x,y,z) = \left(\frac{x}{a},\frac{y}{b},\frac{z}{c}\right)$ blir $\mathbf{T}'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$, og Jacobideterminanten blir $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \frac{1}{abc}$, slik at $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = abc$. Volumet til området vårt blir derfor , etter variabelskiftet,

$$\int\int\int_V \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw = abc\int\int\int_V dudvdw,$$

der V er kula $x^2+y^2+z^2 \leq 1$. Vi vet at volumet av denne kula er $\frac{4}{3}\pi$ (som vi kunne vise på nytt her ved å bruke kulekoordinater). Volumet av ellipsoiden blir derfor $\frac{4}{3}\pi abc$.

Oppgave 6.11.9

Skjæringen mellom paraboloiden (venstre ulikhet) og kula (høyre ulikhet) får vi ved å løse

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \sqrt{2-x^2-y^2} \\ r^2 &= \sqrt{2-r^2} \\ r^4 &= 2-r^2 \\ r^4+r^2-2 &= 0. \end{aligned}$$

som gir at $r = 1$ som eneste mulige løsning. Det er videre klart at for $r < 1$ er ulikheten i oppgaven oppfylt. Volumet er da gitt ved trippelintegralet

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} r dz dr d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r^3 - r\sqrt{2-r^2}\right) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4}r^4 + \frac{1}{3}(2-r^2)^{3/2}\right]_0^1 dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{2}\right) d\theta \\ &= \left(\frac{7}{6}-\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)\pi. \end{aligned}$$

Oppgave 6.11.11

Vi ser på området avgrenset av flatene $z = 6 - x^2 - y^2$, og $z = x^2 - 4x + y^2$.

a)

Skjæringen mellom de to flatene finner vi ved å løse $6 - x^2 - y^2 = x^2 - 4x + y^2$, som koker ned til at $2x^2 - 4x + 2y^2 = 6$. Fullfører vi kvadratene finner vi at $2(x-1)^2 + 2y^2 = 8$, eller $(x-1)^2 + y^2 = 4$. Med andre ord avgrenses området $S = \{(x-1)^2 + y^2 \le 4\}$ av de to flatene. I dette området er det lett å sjekke at $z = 6 - x^2 - y^2$ ligger øverst (sjekk for eksempel ved å sette inn $(x, y) = (0, 0)$, som ligger i S). Derfor blir integralet

$$\begin{aligned} \int\int\int_R y dz dx dy &= \int\int_S \int_{x^2-4x+y^2}^{6-x^2-y^2} y dz dx dy \\ &= \int\int_S [yz]_{x^2-4x+y^2}^{6-x^2-y^2} dz dx dy \\ &= \int\int_S \left(6y - yx^2 - y^3 - yx^2 + 4xy - y^3\right) dx dy \\ &= \int\int_S \left(6y - 2x^2y - 2y^3 + 4xy\right) dx dy. \end{aligned}$$

b)

Vi regner ut integralet ved å sette $u = x - 1$, $v = y$ (Jacobideterminanten blir da 1). Setter vi $D = \{u^2 + v^2 \leq 4\}$ får vi

$$\begin{aligned}
\int\int_S \left(6y - 2x^2y - 2y^3 + 4xy\right) dxdy &= \int\int_D \left(6v - 2(u+1)^2v - 2v^3 + 4(u+1)v\right) dudv \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(8v - 2v(u^2+v^2)\right) rdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(8r^2\sin\theta - 2r^4\sin\theta\right) rdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{8}{3}r^3\sin\theta - \frac{2}{5}r^5\sin\theta\right]_0^2 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{8}{3}2^3 - \frac{2}{5}2^5\right)\sin\theta d\theta \\
&= 0.
\end{aligned}$$

c)

Med parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (1 + 2\cos t, 2\sin t, 1 - 4\cos t).$$

av C regner vi ut at

$$\begin{aligned}
6 - x^2 - y^2 &= 6 - (1 + 2\cos t)^2 - 4\sin^2 t \\
&= 6 - 1 - 4\cos t - 4\cos^2 t - 4\sin^2 t \\
&= 1 - 4\cos t = z \\
x^2 - 4x + y^2 &= (1 + 2\cos t)^2 - 4(1 + 2\cos t) + 4\sin^2 t \\
&= 1 + 4\cos t + 4\cos^2 t - 4 - 8\cos t + 4\sin^2 t \\
&= 1 - 4\cos t = z.
\end{aligned}$$

Dermed er det klart at den parametriserte kurven ligger langs skjæringskurven mellom de to kurvene. Siden skjæringskurven er lukket, og den parametriserte kurven beskriver en lukket kurve som ikke skjærer seg selv, så er det klart at den parameteriserte kurven inneholder hele skjæringskurven. Setter vi $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, y, x)$ får vi at

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= (1 - 4\cos t, 2\sin t, 1 + 2\cos t) \\
\mathbf{r}'(t) &= (-2\sin t, 2\cos t, 4\sin t),
\end{aligned}$$

og dermed får vi

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} (8\cos t\sin t - 2\sin t + 4\sin t\cos t + 4\sin t + 8\sin t\cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (20\cos t\sin t + 2\sin t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (10\sin 2t + 2\sin t)\, dt = 0.
\end{aligned}$$

Oppgave 4.1.1

Vi skal løse likningssystemet

$$\begin{array}{rrrrr} x & +2y & -z & = & 3 \\ 2x & +3y & -3z & = & -1 \\ -x & +2y & +3z & = & 1 \end{array}$$

Gang den første likningen med -2 og legg resultatet til den andre likningen. Da får vi

$$\begin{array}{rrrrr} x & +2y & -z & = & 3 \\ & -y & -z & = & -7 \\ -x & +2y & +3z & = & 1 \end{array}$$

Legg den første likningen til den tredje likningen. Da får vi

$$\begin{array}{rrrrr} x & +2y & -z & = & 3 \\ & -y & -z & = & -7 \\ & 4y & +2z & = & 4 \end{array}$$

Gang den andre likningen med 4 og legg resultatet til den tredje likningen. Da får vi

$$\begin{array}{rrrrr} x & +2y & -z & = & 3 \\ & -y & -z & = & -7 \\ & & -2z & = & -24 \end{array}$$

Den siste likningen sier at $z = 12$. Den andre og den første gir deretter

$$\begin{array}{rcl} y & = & 7 - z = -5 \\ x & = & -2y + z + 3 = 10 + 12 + 3 = 25. \end{array}$$

$(x, y, z) = (25, -5, 12)$ er derfor en entydig løsning av likningssystemet.

Oppgave 4.1.4

Vi skriver systemet på matriseform:

$$\begin{array}{rl} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & -8 & 2 \end{pmatrix} & \overset{II+I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & -8 & 2 \end{pmatrix} \\ & \overset{III+3I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \\ & \overset{III-II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Fra den siste likningen ser vi at systemet ikke har noen løsninger.

Oppgave 4.2.1

Alle matrisene bortsett fra C og F er på trappeform.

Oppgave 4.2.2

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 12 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 10 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 4.2.5

Vi radreduserer den utvidede matrisen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Siden den siste søylen er en pivot-søyle, så er det klart at likningssystemet ikke har noen løsning.

Oppgave 4.2.9

a)

Vi har at

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \overset{IV-I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III+2II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{IV-1/3III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III/3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

Det gitte likningssystemet har matrisen fra a) som koeffisientmatrise. Fra trappeformen ser vi at systemet har uendelig mange løsninger. u kan velges fritt, og

$$\begin{aligned} z &= -u+2 \\ y &= -z-u+3 = u-2-u+3 = 1 \\ x &= -2y-2u+5 = -2-2u+5 = 3-2u. \end{aligned}$$

Oppgave 4.3.1

A, B, D, E er på redusert trappeform.

Oppgave 4.3.2

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \overset{II-3I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{(-1)II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{I-2II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 4.3.4

Den reduserte trappeformen til koeffisientmatrisen til likningssystemet er identitetsmatrisen i dette tilfellet, som lett kan sjekkes ved hjelp av Matlab. Derfor har systemet en unik løsning for alle valg av b_1, b_2, b_3.

Matlab-kode

```
% Oppgave 4.3.3 a)
rref([1 3 -2 2 3; 0 2 -3 4 6; -2 3 1 -4 5; 0 -2 -1 -2 8; 2 3 1 0 -1])

% Oppgave 4.3.3 b)
rref([0.25 0.5 1.5 0.75; 1 0.55 0.7 0.25; -0.25 3 0.75 -0.1])

% Oppgave 4.3.3 c)
rref([1 2 0.5 3 -1 2; 2 0.5 -1 -1 2 3; 1 1 1 2 3 4; 2 -1 2 3 -2 0])
```

```
% Oppgave 4.3.4
rref([1 2 1; 2 4 3; -1 3 2])
```

Python-kode

```
from numpy import *
from MAT1120lib import rref

# Oppgave 4.3.3 a)
print rref([[1,3,-2,2,3],[0,2,-3,4,6],[-2,3,1,-4,5],[0,-2,-1,-2,8],[2,3,1,0,-1]])

# Oppgave 4.3.3 b)
print rref([[0.25,0.5,1.5,0.75],[1,0.55,0.7,0.25],[-0.25,3,0.75,-0.1]])

# Oppgave 4.3.3 c)
print rref([[1,2,0.5,3,-1,2],[2,0.5,-1,-1,2,3],[1,1,1,2,3,4],[2,-1,2,3,-2,0]])
```

```
from numpy import *
from MAT1120lib import rref

# Oppgave 4.3.4
print rref([[1,2,1],[2,4,3],[-1,3,2]])
```