Fasit til utvalgte oppgaver MAT1110, uka 19/4-23/4

Øyvind Ryan (oyvindry@ifi.uio.no)

April 29, 2010

Oppgave 5.5.2

Anta $\{\mathbf{u}_n\}$ er slik at $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_n)$, og at $\lim_{n\to\infty} \mathbf{u}_n = \mathbf{u}$. Da har vi at

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}(\lim_{n\to\infty} \mathbf{u}_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{F}(\mathbf{u}_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{u}_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{u}_n = \mathbf{u},$$

hvor vi har brukt at $\mathbf{F}$ er kontinuerlig. Dermed er $\mathbf{u}$ et fikspunkt.

Oppgave 5.5.3

Funksjonen $g(x) = f(x) - x$ er også kontinuerlig, og $g(0) = f(0) \geq 0$, $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Fra skjæringsetningen vet vi da at det finnes et punkt x der $g(x) = 0$. Men $g(x) = 0$ hvis og bare hvis $f(x) = x$, slik at x er et fikspunkt.

Oppgave 5.6.9

a)

Newtons metode sier

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n - (\mathbf{G}'(\mathbf{x}_n))^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{x}_n) \\
&= \mathbf{x}_n - (\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n) - I_n)^{-1}(\mathbf{F}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{x}_n) \\
&= (\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n) - I_n)^{-1}(\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n) - I_n)\mathbf{x}_n - (\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n) - I_n)^{-1}(\mathbf{F}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{x}_n) \\
&= (\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n) - I_n)^{-1}(\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n)\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_n - \mathbf{F}(\mathbf{x}_n) + \mathbf{x}_n) \\
&= (\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n) - I_n)^{-1}(\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n)\mathbf{x}_n - \mathbf{F}(\mathbf{x}_n)),
\end{aligned}$$

som var det vi skulle vise.

b)

Vi ser på funskjonen $f(x) = x^3 + 3x + 1$. Setter vi $f(x) = x$ ser vi at $g(x) = x^3 + 2x + 1 = 0$. Denne har derivert $g'(x) = 3x^2 + 2$, som alltid er større enn 0. Siden funksjonen er strengt voksende og går fra $-\infty$ til ∞, så følger det fra skjæringssetningen at g bare har ett nullpunkt, og dermed har f bare ett fikspunkt. Videre siden $g(-1) = -2 < 0 < 1 = g(0)$, så følger det at fikspunktet må ligge mellom -1 og 0.

Oppgave 5.7.1

Jacobimatrisen er

$$\mathbf{F}'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi ser at $\mathbf{F}(0,0) = (1,-2)$.

$$\mathbf{F}'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi ser at $\det \mathbf{F}'(0,0) = -1$, slik at $\mathbf{F}'(0,0)$ er inverterbar. Det følger da fra Teorem 5.7.2 at $\mathbf{F}$ har en omvendt funksjon når vi restrikterer oss til en omegn om $(1,-2)$. Vi har at

$$\mathbf{G}'(1,-2) = \mathbf{F}'(0,0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ser at $\mathbf{F}(-1,-1) = (1,-2)$. Videre er

$$\mathbf{F}'(-1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi ser at $\det \mathbf{F}'(-1,-1) = 1$, og $\mathbf{F}$ har dermed en omvendt funksjon i en omgen om $(-1,-1)$. Vi har at

$$\mathbf{H}'(1,-2) = \mathbf{F}'(-1,-1)^{-1} = \mathbf{F}'(-1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 5.7.3

Vi setter $g(x,y) = x^3 + y^3 + y - 1$. Anta $g(x_0, y_0) = 0$. Vi regner ut

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 3y^2 + 1 > 0.$$

Teorem 5.7.3 gir da at det finnes en funksjon $y = f(x)$ slik at $y_0 = f(x_0)$, og $g(x, f(x)) = 0$. Vi har og at

$$f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)} = -\frac{3x_0^2}{3y_0^2 + 1}.$$

Oppgave 5.7.4

Vi setter $f(x,y,z) = xy^2e^z + z$. De partielle deriverte er

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y^2 e^z \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2xye^z \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= xy^2e^z + 1. \end{aligned}$$

Vi ser at $f(-1,2,0) = -4$ og at $\frac{\partial f}{\partial z}(-1,2,0) = -3 \neq 0$. Ved implisitt funksjonsteorem finnes derfor finnes derfor en omegn U om $(-1,2)$ og en funksjon g definert på U slik at $f(x,y,g(x,y)) = -4$. Videre har vi at

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(-1,2) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(-1,2,0)} = -\frac{4}{-3} = \frac{4}{3} \\ \frac{\partial g}{\partial y}(-1,2) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(-1,2,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(-1,2,0)} = -\frac{-4}{-3} = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Oppgave 5.7.5

a)

Vi regner ut

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Derfor blir den inverse matrisen $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

b)

Jacobimatrisen blir

$$\mathbf{F}'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2x & y & 1 \\ 1 & 0 & 2z \end{pmatrix}.$$

Vi ser at $\mathbf{F}'(1,1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, som er matrisen fra a). Siden denne er inverterbar har vi fra omvendt funksjonsteorem at det finnes en omegn U om $(0, \frac{1}{2}, 2)$ og en omvendt funksjon $\mathbf{G}$ definert på U. Videre er

$$\mathbf{G}'(0, \frac{1}{2}, 2) = \mathbf{F}'(1,1,-1)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Oppgave 5.7.10

Sett $f(x,y,z) = x + y^2 + z^3 - 3xyz = 0$. Vi regner ut $\frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 - 3xy$. Der dette er forskjellig fra 0 har vi at

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{1-3yz}{3z^2-3xy} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{2y-3xz}{3z^2-3xy}. \end{aligned}$$

Oppgave 5.7.11

Vi har at $f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - e^{-z} = 0$. Videre er

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 4x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 6y \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 2z + e^{-z}. \end{aligned}$$

I alle punkter der $\frac{\partial f}{\partial z} = 2z + e^{-z} \neq 0$ gir derfor implisitt funksjonsteorem oss at

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{4x}{2z + e^{-z}} \\
\frac{\partial g}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{6y}{2z + e^{-z}}.
\end{aligned}$$

Oppgave 5.7.13

a)

Deriverer vi $\phi(x(t), y(t)) = 0$ på begge sider med hensyn på t får vi at

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial \phi}{\partial y} y'(t) = 0.$$

Deler vi på $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ her får vi at

$$x'(t) = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial y}}{\frac{\partial \phi}{\partial x}} y'(t).$$

Eneste forutsetningen er at $\frac{\partial \phi}{\partial x} \neq 0$.

b)

Deriverer vi $\phi(x(t), y(t), z(t)) = 0$ på begge sider med hensyn på t får vi at

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial \phi}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial \phi}{\partial z} z'(t) = 0.$$

Deler vi på $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ her får vi at

$$x'(t) = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial y}}{\frac{\partial \phi}{\partial x}} y'(t) - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial z}}{\frac{\partial \phi}{\partial x}} z'(t).$$

Eneste forutsetningen er som før at $\frac{\partial \phi}{\partial x} \neq 0$.

Oppgave 5.7.14

De passende betingelsene det refereres til er at de tre deriverte

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

er forskjellige fra 0 i de punktene vi ser på. Da er betingelsene ifor implisitt funksjonsteorem oppfylt, og vi kan skrive

$$\frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial x} = \left(-\frac{\frac{\partial \phi}{\partial y}}{\frac{\partial \phi}{\partial x}} \right) \left(-\frac{\frac{\partial \phi}{\partial z}}{\frac{\partial \phi}{\partial y}} \right) \left(-\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\frac{\partial \phi}{\partial z}} \right) = -1.$$

Matlab-kode

```
function [x,y]=oppg050501(x1,y1,antalliterasjoner)
  x=zeros(antalliterasjoner+1);
  y=zeros(antalliterasjoner+1);
  x(1)=x1;
  y(1)=y1;

  for n=1:antalliterasjoner
    x(n+1)=0.5*sin(x(n)+y(n));
    y(n+1)=0.5*cos(x(n)-y(n));
  end
```

```
% Oppgave 5.5.1

% b)
[x,y]=oppg050501(1,-1,30);
plot(x,y)
axis([-1 1 -1 1]);

% c)
for k=1:6
  x1=5*rand()-2.5;
  y1=5*rand()-2.5;
  [x,y]=oppg050501(x1,y1,30);
  subplot(2,3,k);
  plot(x,y)
  axis([-1 1 -1 1]);
end
```

```
% Oppgave 5.6.9
xfit=-0.5
xn=-0.5
for k=1:10
  xfit=xfit^3+3*xfit+1
  xn=((3*xn^2+3)*xn-(xn^3+3*xn+1))/(3*xn^2+3-1)
end
```

Python-kode

```
from numpy import *
from scitools.easyviz import *

def oppg050501(x1,y1,antalliterasjoner):
  x=zeros(antalliterasjoner+1)
  y=zeros(antalliterasjoner+1)
  x[0]=x1
  y[0]=y1

  for n in range(antalliterasjoner):
    x[n+1]=0.5*sin(x[n]+y[n])
    y[n+1]=0.5*cos(x[n]-y[n])
  return x,y
```

```
# Oppgave 5.5.1
from oppg050501 import *
from numpy import *
from scitools.easyviz import *

# b)
x,y=oppg050501(1,-1,30)
plot(x,y)
axis([-1,1,-1,1])

# c)
figure(2)
for k in range(6):
  x1=5*random.rand()-2.5
  y1=5*random.rand()-2.5
  x,y=oppg050501(x1,y1,30)
  subplot(2,3,k+1)
  plot(x,y)
  axis([-1,1,-1,1])
```

```
# Oppgave 5.6.9
xfit=-0.5
print xfit
xn=-0.5
print xn
for k in range(10):
  xfit=xfit**3+3*xfit+1
  print xfit
  xn=((3*xn**2+3)*xn-(xn**3+3*xn+1))/(3*xn**2+3-1)
  print xn
```