Fasit til utvalgte oppgaver MAT1110, uka 3/5-7/5

Øyvind Ryan (oyvindry@ifi.uio.no)

May 5, 2010

Oppgave 5.8.1

Siden $\mathbf{F}$ er kontinuerlig vet vi at komponentfunksjonene $F_1, ..., F_k$ er kontinuerlige (Setning 2.2.4). Fra Setning 5.7.2 vet vi da at hver av disse er begrenset på A. Det finnes altså konstanter $K_1, ..., K_k$ slik at $|F_i(x)| < K_i$ for alle $x \in A$. Sett $K = \max(K_1, ..., K_k)$. Da er

$$|F(\mathbf{x})| = \sqrt{|F_1(\mathbf{x})|^2 + \cdots + |F_k(\mathbf{x})|^2} \leq \sqrt{K^2 + \cdots K^2} = K\sqrt{k}.$$

Vi kan altså velge $K\sqrt{k}$ som vår begrensende konstant.

Oppgave 5.8.3

a)

$f(\mathbf{x})$ er kontinuerlig fordi den er en sammensetning av kontinuerlige funksjoner. Alternativt kan vi bevise dette slik: Gitt $\epsilon > 0$. da er

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| = |\mathbf{F}(\mathbf{y}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq |\mathbf{F}(\mathbf{y}) - \mathbf{F}(\mathbf{x})| + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Hvis vi velger δ slik at $|\mathbf{F}(\mathbf{y}) - \mathbf{F}(\mathbf{x})| < \epsilon/2$ når $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta$, og samtidig velger $\mathbf{y}$ slik at $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \epsilon/2$, så vil dette være mindre enn $\epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$, og vi har vist at funksjonen f er kontinuerlig.

At f har minimumspunkt følger direkte fra Setning 5.7.2.

b)

Det er klart at det kan være maks. ett fikspunkt: Hvis både $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ var fikspunkter ville

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = |\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})| < |\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

som er en selvmotsigelse. Anta så at $\mathbf{x}$ er minimumspunktet til $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - F(\mathbf{x})|$. Vi har at

$$f(\mathbf{F}(\mathbf{x})) = |\mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{x})) - \mathbf{F}(\mathbf{x})| < |\mathbf{F}(x) - \mathbf{x}| = f(\mathbf{x})$$

Siden $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ også er i A sier dette oss at $f(\mathbf{F}(\mathbf{x}))$ antar en verdi mindre enn minimum. Eneste måten å unngå dette på er at $\mathbf{F}(x) = \mathbf{x}$, slik at $\mathbf{x}$ er et fikspunkt.

c)

Ta for eksempel $f(x) = x/2$, der A er en hvilken som helst mengde som ikke inneholder 0.

Oppgave 5.9.1

a)

De partielle deriverte blir $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4$, og $\frac{\partial f}{\partial x} = 4y + 4$. De stasjonære punktene er derfor løsningen av

$$\begin{aligned} 2x - 4 &= 0 \\ 4y + 4 &= 0, \end{aligned}$$

som gir $(x, y) = (2, -1)$ som eneste stasjonære punkt.

d)

De partielle deriverte blir $\frac{\partial f}{\partial x} = (x+1)e^{y^2+x}$, og $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xye^{y^2+x}$. Det er klart at $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ hvis og bare hvis $x = -1$. Men hvis $x = -1$ så er eneste mulighet for $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ at $y = 0$. Eneste stasjonære punkt blir derfor $(x, y) = (-1, 0)$.

Oppgave 5.9.2

a)

Vi ser at $\bigtriangledown f = (2x-2, 2y+4)$. Vi ser at eneste stasjonære punkt er $x = 1, y = -2$. Hesse-matrisen er

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Egenverdiene til denne er begge lik 2, siden egenverdiene alltid står på diagonalen i en diagonalmatrise. Dermed sier annenderiverttesten at $(1, -2)$ er et lokalt minimum.

b)

Vi ser at $\bigtriangledown f = (2xy^2 - 4y + 6, 2x^2y - 4x - 6)$. I et stasjonært punkt må vi ha at

$$\begin{aligned} 2xy^2 - 4y &= -6 \\ 2x^2y - 4x &= 6 \end{aligned}$$

som også kan skrives

$$\begin{aligned} 2x^2y^2 - 4xy &= -6x \\ 2x^2y^2 - 4xy &= 6y. \end{aligned}$$

Vi ser da at $y = -x$, slik at $2x^3 + 4x + 6 = 0$. Det er lett å sjekke at $x = -1$ er en rot her, og det er raskt å sjekke at dette er eneste rot (gjør feks. polynomdivisjon og bruk formelen for andregradslikningen). Eneste stasjonære punkt er altså $(-1, 1)$. Vi har at

$$\begin{aligned} Hf(x, y) &= \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy - 4 \\ 4xy - 4 & 2x^2 \end{pmatrix} \\ Hf(-1, 1) &= \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vi finner raskt ut at determinanten er negativ. Dermed er $(-1, 1)$ et sadelpunkt.

c)

De partielle deriverte til $f(x,y) = e^{x^2+3y^2}$ er

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2xe^{x^2+3y^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 6ye^{x^2+3y^2}.
\end{aligned}$$

Det er klart at disse er 0 bare for $x = y = 0$, slik at origo er eneste stasjonære punkt. Andreordens partielle deriverte blir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= (2+4x^2)e^{x^2+3y^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 12xye^{x^2+3y^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= (6+36y^2)e^{x^2+3y^2}.
\end{aligned}$$

Hesse-matrisen i origo blir dermed $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. Egenverdiene her er 2 og 6. Siden begge disse er positive så er punktet et minimum.

Oppgave 5.9.7

De partielle deriverte til f er

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= yz - 2x \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= xz - 2y \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= xy - 2z.
\end{aligned}$$

Det er dermed klart at $(x,y,z) = (0,0,0)$ er et stasjonært punkt. Det er også klart at andre stasjonære punkter har $x, y, z \neq 0$. Setter vi $yz - 2x = 0$ får vi at $x = \frac{yz}{2}$. Setter vi dette inn i den andre likningen får vi at $\frac{yz}{2}z = 2y$, eller at $z^2 = 4$. På samme måte gjelder at $x^2 = y^2 = 4$, og vi har derfor at $x = \pm 2, y = \pm 2, z = \pm 2$. Ved å prøve alle muligheter her set vi at det bare er $(x,y,z) = (2,2,2), (2,-2,-2), (-2,2,-2), (-2,-2,2)$ som gir stasjonært punkter.

Andreordens partielle deriverte blir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= z \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= y.
\end{aligned}$$

Hesse-matrisen blir altså

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2 & z & y \\ z & -2 & x \\ y & x & -2 \end{pmatrix}.$$

$Hf(0,0,0)$ blir diagonalmatrisen med bare -2 på diagonalen. Alle egenverdiene er dermed -2, slik at $(0,0,0)$ er et maksimum. For punktet $(2,2,2)$ får vi Hesse-matrisen

$$Hf(2,2,2) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Den karakteristiske likningen her er

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \lambda+2 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda+2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda+2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda+2 & -2 \\ -2 & \lambda+2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & \lambda+2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & \lambda+2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+2)^3 - 4(\lambda+2) + 2(-2(\lambda+2)-4) - 2(4+2(\lambda+2)) \\
&= (\lambda+2)^3 - 12(\lambda+2) - 16 \\
&= \lambda^3 + 6\lambda^2 - 32
\end{aligned}$$

Det er fort gjort å sjekke at $\lambda = -4$ er en rot her. Polynomdivisjon gir $\lambda^3+6\lambda^2-32 = (\lambda+4)(\lambda^2+2\lambda-8)$. Og formelen for løsningen av andregradslikningen gir $\lambda^3+6\lambda^2-32 = (\lambda+4)^2(\lambda-2)$. Egenverdiene er altså 2 og -4, og derfor er punktet et sadelpunkt.

Strengt talt må vi gjøre som over for Hesse-matrisene i de andre stasjonære punktene også, men vi kan gjøre et par småtricks for å redusere utregningene: Vi finner først fort at

$$\lambda I_3 - Hf(2,-2,-2) = \begin{pmatrix} \lambda+2 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda+2 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda+2 \end{pmatrix}.$$

Sammenligner vi med $\lambda I_3 - Hf(2,2,2)$ ser vi at vi kan få denne fra $\lambda I_3 - Hf(2,2,2)$ ved å gange første søyle med -1, og deretter gange første rad med -1. Effekten av disse operasjonene til sammen forandrer ikke determinanten, slik at $Hf(2,-2,-2)$ får de samme egenverdiene, slik at $(2,-2,-2)$ også er et sadelpunkt. De siste 2 punktene blir også sadelpunkter med samme begrunnelse, siden

- $\lambda I_3 - Hf(-2,-2,2)$ kan fås fra $\lambda I_3 - Hf(2,2,2)$ ved å gange tredje søyle med -1, og deretter gange tredje rad med -1.
- $\lambda I_3 - Hf(-2,2,-2)$ kan fås fra $\lambda I_3 - Hf(2,2,2)$ ved å gange andre søyle med -1, og deretter gange andre rad med -1.

Oppgave 5.9.8

Vi ser at $\bigtriangledown f = (4xy+4y, 2x^2+4x-2y)$. Hvis $y=0$ må også $2x^2+4x=0$. Dette gir de to stasjonære punktene $(0,0)$, $(-2,0)$. Hvis $y \neq 0$ sier den første komponenten at $x=-1$. Den andre komponenten sier da $2-4=2y$, så $y=-1$. Dermed er også $(-1,-1)$ et stasjonært punkt. De stasjonære punktene blir altså $(0,0),(-2,0),(-1,-1)$.

Hesse-matrisen er

$$
\begin{aligned}
Hf(x,y) &= \begin{pmatrix} 4y & 4x+4 \\ 4x+4 & -2 \end{pmatrix} \\
Hf(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \\
Hf(-2,0) &= \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \\
Hf(-1,-1) &= \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Vi ser umiddelbart at $(-1,-1)$ er et maksimumspunkt. Determinantene til $Hf(0,0)$ og $Hf(-2,0)$ blir begge negative, så disse er sadelpunkter.

Oppgave 5.9.10

Vi setter $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.

a)

De partielle deriverte er

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= (2x - x^3 + xy^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= (-2y - x^2y + y^3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.
\end{aligned}
$$

De stasjonære punktene får vi ved å løse

$$
\begin{aligned}
2x - x^3 + xy^2 &= 0 \\
-2y - x^2y + y^3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Hvis $x = 0$ ser vi at eneste mulighet for y er at $y = 0, y = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$. Hvis $y = 0$ ser vi at eneste mulighet for x er at $x = 0, x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$. Hvis både x og y er forskjellige fra 0 ser vi at

$$
\begin{aligned}
2 &= x^2 - y^2 \\
2 &= y^2 - x^2,
\end{aligned}
$$

som jo ikke har noen løsninger. Vi ser derfor at de eneste stasjonære punktene er $(0,0), (0,\sqrt{2}), (0,-\sqrt{2}), (\sqrt{2},0), (-\sqrt{2},0)$.

Vi regner så ut andreordens partielle deriverte:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= (2 - 5x^2 + y^2 + x^4 - x^2y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= (x^3y - xy^3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= (-2 - x^2 + 5y^2 + x^2y^2 - y^4)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.
\end{aligned}
$$

Hesse-matrisene blir

$$
\begin{aligned}
Hf(0,0) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\
Hf(0,\sqrt{2}) &= \begin{pmatrix} 4e^{-1} & 0 \\ 0 & 4e^{-1} \end{pmatrix} \\
Hf(0,-\sqrt{2}) &= \begin{pmatrix} 4e^{-1} & 0 \\ 0 & 4e^{-1} \end{pmatrix} \\
Hf(\sqrt{2},0) &= \begin{pmatrix} -4e^{-1} & 0 \\ 0 & -4e^{-1} \end{pmatrix} \\
Hf(-\sqrt{2},0) &= \begin{pmatrix} -4e^{-1} & 0 \\ 0 & -4e^{-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Alt her er diagonalmatriser, og da vet vi at egenverdiene står på diagonalen. Vi ser derfor at

1. $(0,0,0)$ er sadelpunkt,
2. $(0,\sqrt{2},-2e^{-1}),(0,-\sqrt{2},-2e^{-1})$ er minimumspunkter,
3. $(\sqrt{2},0,2e^{-1}),(-\sqrt{2},0,2e^{-1})$ er maksimumspunkter.

b)

Legg først merke til at to av de sjasjonære punktene ligger utenfor rektanglet vårt.

Hvis $|x| = 1$ får vi funksjonen $f(y) = (1-y^2)e^{-\frac{1+y^2}{2}}$. Av uttrykket for de partielle deriverte ser vi at denne er 0 når $-2y - y + y^3 = y^3 - 3y = 0$, altså når $y = 0$, eller når $y = \pm\sqrt{3}$

Hvis $|y| = 3$ får vi funksjonen $f(x) = (x^2-9)e^{-\frac{x^2+9}{2}}$. Av uttrykket for de partielle deriverte ser vi at denne er 0 når $2x - x^3 + 9x = 11x - x^3 = 0$, altså når $x = 0$, eller når $x = \pm\sqrt{11}$. De siste punktene ligger utenfor rektanglet vårt.

Vi må også spesielt sjekke punktene der både $|x| = 1, |y = 3|$.

Kandidatene våre til globalt maksimum og minimum på området vårt blir derfor

$$
\begin{array}{l}
(0,0,0) \\
(0,\pm\sqrt{2},-2e^{-1}) \\
(\pm 1,0,e^{-1/2}) \\
(\pm 1,\pm\sqrt{3},-2e^{-2}) \\
(\pm 1,\mp\sqrt{3},-2e^{-2}) \\
(0,\pm 3,-9e^{-9/2}) \\
(\pm 1,\pm 3,-8e^{-5}) \\
(\pm 1,\mp 3,-8e^{-5})
\end{array}
$$

Sammenligner vi verdiene ser vi at $(\pm 1,0,e^{-1/2})$ er globale maksimum, mens $(0,\pm\sqrt{2},-2e^{-1})$ er globale minimum.

Oppgave 5.9.12

a)

Vi har at $z = \frac{500}{xy}$. Uttrykket for $L(x,y)$ blir

$$L(x,y) = 4x + 2y + \frac{1000}{xy}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= 4 - \frac{1000}{x^2y} \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2 - \frac{1000}{xy^2}.\end{aligned}$$

b)

Skal begge de partielle deriverte være 0 må

$$\begin{aligned}\frac{1000}{x^2y} &= 4 \\ \frac{1000}{xy^2} &= 2,\end{aligned}$$

som også kan skrives

$$\begin{aligned}x^2y^2 &= 250y \\ x^2y^2 &= 500x.\end{aligned}$$

Dermed er $y = 2x$. Setter vi dette inn i den første likningen får vi at $\frac{500}{x^3} = 4$, eller $x = 5$. Videre er $y = 2x = 10$. For z får vi

$$z = \frac{500}{xy} = 10.$$

Oppgave 5.9.16

Vi må maksimere $V = xyz$ gitt at $x + y + z = 108$. Dette svarer til å maksimere funksjonen $V(x, y) = xy(108 - x - y) = 108xy - x^2y - xy^2$. De partielle deriverte blir

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= 108y - 2xy - y^2 \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= 108x - 2xy - x^2.\end{aligned}$$

Disse er 0 bare når (Vi kan anta $x > 0, y > 0$)

$$\begin{aligned}2x + y &= 108 \\ x + 2y &= 108.\end{aligned}$$

Vi ser fort her at løsningen på dette er $x = y = 36$, slik at maksimum inntreffer når $x = y = z = 36$.

Oppgave 5.9.18

a)

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x} &= 12000 - x \\ \frac{\partial Q}{\partial y} &= 12000 - y.\end{aligned}$$

Vi ser at disse størrelsene er 0 vis og bare hvis $x = y = 12000$. Vi har at

$$\begin{aligned}P(12000, 12000) &= \frac{1}{4}12000^2 = 36 \times 10^6 \\ Q(12000, 12000) &= \frac{1}{3}12000^2 = 48 \times 10^6.\end{aligned}$$

b)

Vi har at

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial x} &= 12000-\frac{4}{3}x\\ \frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial y} &= 12000-\frac{3}{2}y\end{aligned}$$

Vi ser at disse størrelsene er 0 hvis og bare hvis $x = 9000, y = 8000$. Vi har at

$$\begin{aligned}P(9000,8000) &= 108\times 10^6-\frac{81}{2}10^6-16\times 10^6 = 51.5\times 10^6\\ Q(9000,8000) &= 96\times 10^6-32\times 10^6-\frac{81}{6}10^6 = 50.5\times 10^6.\end{aligned}$$

c)

Vi setter nå

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial x} &= 12000-\frac{4}{3}x = 0\\ \frac{\partial Q}{\partial y} &= 12000-y = 0.\end{aligned}$$

Vi ser at disse størrelsene er 0 hvis og bare hvis $x = 9000, y = 12000$. Vi har at

$$\begin{aligned}P(9000,12000) &= 108\times 10^6-\frac{81}{2}10^6-36\times 10^6 = 31.5\times 10^6\\ Q(9000,12000) &= 144\times 10^6-72\times 10^6-\frac{81}{6}10^6 = 58.5\times 10^6.\end{aligned}$$

Oppgave 5.10.1

a)

Ser at

$$\begin{aligned}\bigtriangledown f(x,y) &= (4,-3)\\ \bigtriangledown g(x,y) &= (2x,2y).\end{aligned}$$

Vi ser at $\bigtriangledown g(x,y) = 0$ hvis og bare hvis $x = y = 0$, og dette er ikke kompatibelt med bibetingelsen. Vi trenger derfor bare finne løsningen av

$$\bigtriangledown f(x,y) = \begin{pmatrix} 4\\ -3\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 2x\\ 2y\end{pmatrix} = \lambda \bigtriangledown g(x,y).$$

Vi ser her at $x \neq 0, y \neq 0$. Deler vi første komponent på andre komponent får vi at $\frac{x}{y} = -\frac{4}{3}$, eller $x = -\frac{4}{3}y$. Setter vi dette inn i bibetingelsen får vi at $\frac{16}{9}y^2 + y^2 = 1$, som gir at $y = \pm\frac{3}{5}$, med tilhørende verdi for x, $x = \mp\frac{4}{5}$. Vi får dermed de to kandidatene $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 5), (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, -5)$. det første er et maksimum, det andre et minimum.

b)

Ser at

$$\begin{aligned}\bigtriangledown f(x,y) &= (y,x)\\ \bigtriangledown g(x,y) &= (18x,2y).\end{aligned}$$

Vi ser først at $\bigtriangledown g(x,y) = 0$ ikke har noen løsning som lar seg kombinere med bibetingelsen. Likningen $\bigtriangledown f = \lambda \bigtriangledown g$ blir til

$$\begin{aligned} y &= 18\lambda x \\ x &= 2\lambda y. \end{aligned}$$

Vi ser at bibetingelsen lar seg bare oppfylle hvis $x, y, \lambda \neq 0$. Fra de to likningene ser vi at $\frac{1}{18\lambda} = 2\lambda$, som gir $36\lambda^2 = 1$, og dermed $\lambda = \pm\frac{1}{6}$. Den første likningen sier at $y = \pm\frac{1}{6}18x = \pm 3x$. Innsatt i bibetingelsen gir dette at $9x^2 + 9x^2 = 18$, eller $x = \pm 1$. Vi ser derfor at alle kandidatene er $(\pm 1, \pm 3)$. Det er derfor klart at $f(x,y) = xy$ har minimum (-3) for $(x,y) = (-1,3), (1,-3)$, og maksimum (3) for $(x,y) = (-1,-3), (1,3)$.

c)

Ser at

$$\begin{aligned} \bigtriangledown f(x,y,z) &= (2x, 2y, 2z) \\ \bigtriangledown g(x,y,z) &= (2,-3,2). \end{aligned}$$

Vi ser at $\bigtriangledown g(x,y,z)$ aldri kan bli 0. Vi trenger derfor bare finne løsningen av

$$\bigtriangledown f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \bigtriangledown g(x,y,z).$$

En løsning her er $\lambda = x = y = z = 0$, men denne løsningen er ikke kompatibel med bibetingelsen. Deler vi komponentene på hverandre får vi likningene

$$\begin{aligned} z &= x \\ y &= -\frac{3}{2}x. \end{aligned}$$

Setter vi dette inn i bibetingelsen får vi

$$2x - 3y + 2z = 2x + \frac{9}{2}x + 2x = \frac{17}{2}x = 17,$$

slik at $x = 2$. Vår kandidat blir dermed $(2,-3,2)$. Det er klart at dette må bli et minimum, siden problemet er å minimere/maksimere avstanden fra et plan til origo.

d)

Her er det to bibetingelser. Alle gradientene blir nå

$$\begin{aligned} \bigtriangledown f &= (1,1,1) \\ \bigtriangledown g_1 &= (2x, 2y, 0) \\ \bigtriangledown g_2 &= (2,0,1). \end{aligned}$$

Likningene våre blir derfor

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eneste mulighet for at de to vektorene på høyre side er lineært avhengige er at $x = y = 0$, men dette er ikke forenlig med bibetingelsene. Vi ser også lett fra likningene at $\lambda_2 = 1$. De to første likningene kan derfor skrives om til

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 x &= -1 \\ 2\lambda_1 y &= 1, \end{aligned}$$

som viser at $x = -y$. Innsatt i bibetingelsene ser vi at

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1-\sqrt{2}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\sqrt{2})$$

er de eneste kandidatene til maksimum og minimum. Verdien i det første punktet er $1-\sqrt{2}$ (som blir minimum), verdien i det andre punktet er $1+\sqrt{2}$ (maksimum).

f)

Likningen for gradientene blir her

$$\begin{pmatrix} 2x-2 \\ 4y \\ 2z+1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De to gradientene på høyre siden ser vi fort at er lineært uavhengige, slik at vi ikke får ekstra løsninger på grunn av lineær avhengighet. Vi kan videre uttrykke x, y, z ved λ_1, λ_2 ved hjelp av komponentlikningene over:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_2 + 1 \\ y &= \frac{1}{4}\lambda_1 - \frac{1}{4}\lambda_2 \\ z &= \frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Setter vi inn dette i bibetingelsene får vi

$$\begin{aligned} g_1(x,y,z) &= x+y+z = \frac{5}{4}\lambda_1 + \frac{1}{4}\lambda_2 + \frac{1}{2} = 1 \\ g_2(x,y,z) &= 2x-y-z = \frac{1}{4}\lambda_1 + \frac{11}{4}\lambda_2 + \frac{5}{2} = 5. \end{aligned}$$

Setter vi konstantleddene på samme side kan vi danne oss den utvidede matrisen

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{11}{4} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Radreduserer vi denne får vi matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & \frac{8}{9} \end{pmatrix}$, slik at $\lambda_1 = \frac{2}{9}, \lambda_2 = \frac{8}{9}$. Setter vi inn dette i likningene for x, y, z får vi

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_2 + 1 = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} + 1 = 2 \\ y &= \frac{1}{4}\lambda_1 - \frac{1}{4}\lambda_2 = \frac{1}{18} - \frac{2}{9} = -\frac{1}{6} \\ z &= \frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{9} - \frac{4}{9} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Vi ser derfor at vårt minimum er $(x, y, z) = (2, -\frac{1}{6}, -\frac{5}{6})$. At dette faktisk er et minimum kan lett begrunnes ved å sammenligne med verdien i et annet punkt, eller ved å se på problemet som det å finne et punkt på en linje som ligger nærmest et annet punkt.

Matlab-kode

```
% Oppgave 5.9.10 b)
[x,y]=meshgrid(-3:0.01:3);
z=(x.^2 - y.^2).*exp(-(x.^2 + y.^2)/2);
mesh(x,y,z)
```

Python-kode

```
# Oppgave 5.9.10 b)
u=linspace(-3,3,100)
v=linspace(-3,3,100)
x,y=meshgrid(u,v,sparse=False,indexing='ij')
z=(x**2 - y**2)*exp(-(x**2 + y**2)/2.0)
mesh(x,y,z)
```