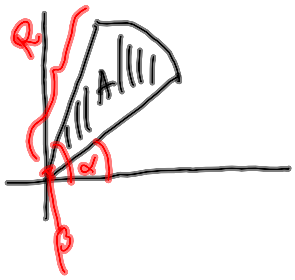
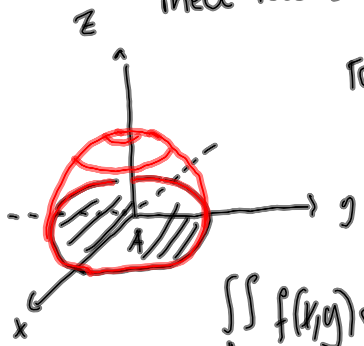
Litt mer om integraler i polarkoord.



f er kont. på A,

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta \int_0^R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,dr\,d\theta.$$

Eks: Regn ut volumet avgrenset av kuleskallet med radius R og (x,y)-planet i $\mathbb{R}^3$.



Tenk til kula: $x^2+y^2+z^2=R^2$

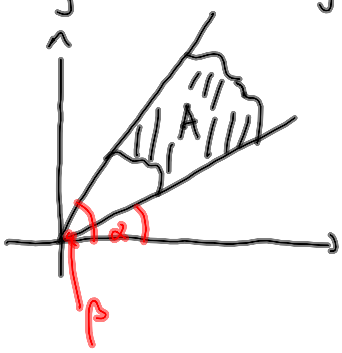
Vi er interessert i $f(x,y)=\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}$.

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^R \underbrace{\sqrt{R^2-r^2}}_{(R^2-r^2)^{1/2}}\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{3/2}\right]_0^R d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}R^3\,d\theta = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3}R^3}},$$

Mer generell situasjon:

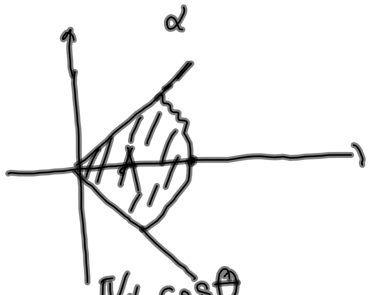


For alle θ med $\alpha \le \theta \le \beta$ består A av alle punkter $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ med $\varphi_1(\theta) \le r \le \varphi_2(\theta)$, der φ_1, φ_2 er kont. på $[\alpha,\beta]$ med $\varphi_1 \le \varphi_2$.

Da, gitt f kontinuerlig på A, har vi

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \int^\beta \int^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,dr\,d\theta$$

Eks: $\underset{\substack{\shortparallel \\ \alpha}}{-\frac{\pi}{4}} \le \theta \le \underset{\substack{\shortparallel \\ \beta}}{\pi/4}$, $0 \le r \le \cos\theta$, $f(x,y) = xy^2$.



$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} \int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{\cos\theta} r^4\cdot\cos\theta\cdot\sin^2\theta\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\frac{1}{5}\cdot r^5\cos\theta\cdot\sin^2\theta\right]_0^{\cos\theta} d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^6\theta\cdot\sin^2\theta\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^6\theta - \cos^8\theta\,d\theta =$$ har sett hvordan vi regner ut.

Anvendelses:

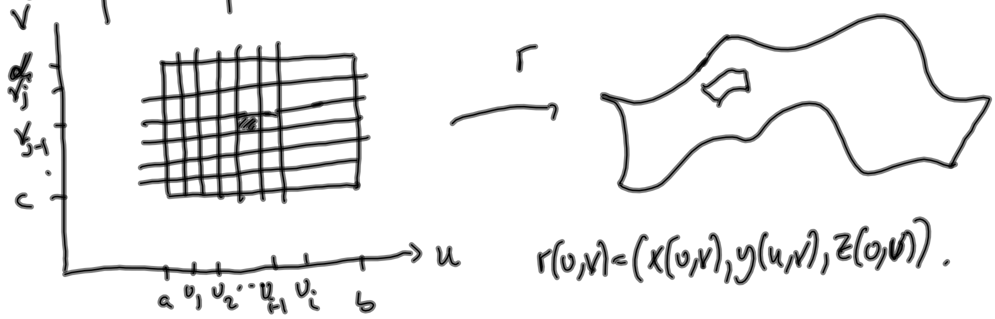
Volum: Dersom $f(x,y) \geq 0$ på A i $\mathbb{R}^2$, da er volumet til området avgrenset av A og grafen til $f(x,y)$ over A gitt ved

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy.$$

Areal til A: $\text{Areal}(A) = \iint_A 1_A\,dx\,dy$.

Arealet til flater i $\mathbb{R}^3$

Ser på en parametrisert flate $r : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$



$r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

Partisjon: $a = u_0 < u_1 < \cdots < u_n = b$

$c = v_0 < v_1 < \cdots < v_m = d$

Arealet av $r([u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j])$?

Burde være omtrent arealet til parallellogrammet utspent av. $r(u_i, v_{j-1}) - r(u_{i-1}, v_{j-1})$, og

$r(u_{i-1}, v_j) - r(u_{i-1}, v_{j-1})$.

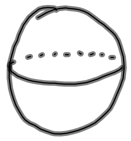
Dvs: $$\left| \frac{\left(r(u_i, v_{j-1}) - r(u_{i-1}, v_{j-1})\right)}{(u_i - u_{i-1})} \times \frac{\left(r(u_{i-1}, v_j) - r(u_{i-1}, v_{j-1})\right)}{(v_j - v_{j-1})} \right| \cdot (u_i - u_{i-1}) \cdot (v_j - v_{j-1})$$

$$\simeq \left| \frac{\partial r}{\partial u}(u_{i-1}, v_{i-1}) \times \frac{\partial r}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \right| \cdot (u_i - u_{i-1}) \cdot (v_j - v_{j-1}).$$

Som før kjennes vi igjen at dette passer inn i en Riemann-sum, så arealet av $r(A)$ burde være:

$$\boxed{\text{Areal}(r(A)) = \iint_R \left| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right| du\,dv.}$$

Eksempel: Finn arealet til overflaten til en kule med radius 1.



Parametrisering: $r : [0,\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$r(\phi, \theta) = (\sin\phi \cdot \cos\theta, \sin\phi \cdot \sin\theta, \cos\phi).$$

$$\frac{\partial r}{\partial \phi} = (\cos\phi \cdot \cos\theta, \cos\phi \cdot \sin\theta, -\sin\phi)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = (-\sin\phi \sin\theta, \sin\phi \cdot \cos\theta, 0).$$

$$\frac{\partial r}{\partial \phi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} i & j & K \\ \cos\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi \\ -\sin\phi\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\sin^2\phi \cdot \cos\theta, \sin^2\phi \sin\theta, \cos\phi \cdot \sin\phi \cdot \cos^2\theta + \cos\phi \sin\phi \sin^2\theta)$$

$$= (\sin^2\phi \cdot \cos\theta, \sin^2\phi \sin\theta, \cos\phi \cdot \sin\phi).$$

$$\left|\frac{\partial r}{\partial \phi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta}\right| = \sqrt{\sin^4\phi \cdot \cos^2\theta + \sin^4\phi \cdot \sin^2\theta + \cos^2\phi \cdot \sin^2\phi}$$

$$= \sqrt{\sin^4\phi + (1 - \sin^2\phi) \cdot \sin^2\phi}$$

$$= \sin\phi.$$

Arealet er da $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\phi \, d\phi d\theta = \underline{on}$.

$\underline{4\pi}$.

Flateintegraler for skalarfelter

S flate i $\mathbb{R}^3$,
f er kontinuerlig på S,
La $r: R \to \mathbb{R}^3$ parametrisere S.

$$\boxed{\iint_R \left|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right| f(r(u,v))\cdot du\,dv}$$

Green's Teorem

Integraler av vektorfelter: $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ er vektorfelt på $\mathbb{R}^2$. La C være en kurve med parametrisering $r: [a,b] \to \mathbb{R}^2$.

Da er

$$\int_C F\cdot dr = \int_a^b F(r(t))\cdot r'(t)\,dt.$$

$$= \int_a^b P(r(t))\cdot x'(t) + Q(r(t))\cdot y'(t)\,dt,$$

der $r(t) = (x(t), y(t))$.

Vanlig å skrive dette som

$$\int_C F\cdot dr = \int_C P\,dx + Q\,dy.$$

lukket enkel kurve.

området avgrenset av curven C.

Teorem 6.5.1 (Green's teorem).

Anta at C er en lukket enkel kurve med en stykkevis glatt parametrisering r (mot klokka). Dersom P og Q er kontinuerlig deriverbare i en omegn om området R avgrenset av C. Da er

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy .$$

Merk: Analysens fundamentalteorem

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a) .$$

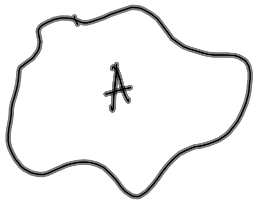
Eks:

$$\int_C \underbrace{x^5}_{P}dx + \underbrace{y^7}_{Q}dy$$

$$= \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$= 0 ,$$

Arealberegning:



La C = randa til område A

$$\text{Areal}(A) = \iint_A 1 \, dxdy .$$

$$\int P dx + Q dy = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Setter $Q(x,y) = x$.

$$\int_C Q \, dy = \int_C x \, dy = \iint_A 1 \cdot dxdy .$$

Tilsvarende, om vi setter $P(x,y) = -y$

får vi

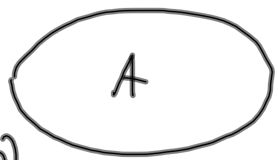
$$\int_C -y \, dx = \iint_A dxdy$$

Så arealet til A er gitt ved

$$\boxed{\text{Areal}(A) = \frac{1}{2} \int_C x \, dy - y \, dx} .$$

Eksempel: Regn ut arealet av ellipsen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 .$$



Parametriserer randa: $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\text{Regne ut } \iint_A dxdy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a\cos\theta \cdot b\cos\theta + b\sin\theta \cdot a\sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab \, d\theta = \frac{2\pi \cdot ab}{2} .$$

$\blacksquare$