Mer Lagrange

$\mathbb{R}^n$ $\quad A=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : g(\vec{x})=b\}$, $\quad g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

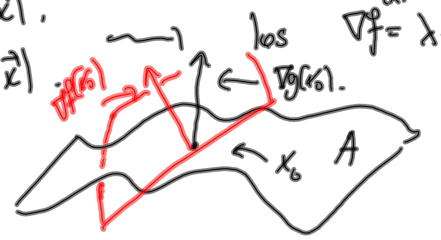
$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. (deriverbar).

Finn maks/min for f på A.

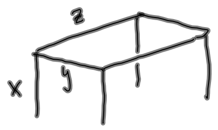
$\nabla g(\vec{x})$,

$\nabla f(\vec{x})$ $\longrightarrow$ løs $\nabla f(\vec{x}) = \lambda\cdot\nabla g(\vec{x})$.

$\lambda\in\mathbb{R}$.



Eks: Bygge rektangulært telt med volum $500\ m^3$.
Minimer total lengde på teltstenger.



minimer $4x+2y+2z$
under betingelsen $xyz=500$.

Sett $f(x,y,z) = 4x+2y+2z$.
$g(x,y,z) = xyz \quad , \quad b=500$.

Obs: • f kan ikke ha et maks på A.
•• f må ha et min.

$\nabla f(x,y,z) = (4,2,2)$

$\nabla g(x,y,z) = (yz, xz, xy)$

løs $\nabla f(x,y,z) = \lambda\nabla g(x,y,z)$.
$(4,2,2) = \lambda\cdot(yz,xz,xy)$

$$\left.\begin{array}{l} 4=\lambda yz \\ 2=\lambda\cdot xz \end{array}\right\} y=2x \qquad \left.\begin{array}{l} 2=\lambda\cdot xz \\ 2=\lambda\, xy \end{array}\right\} y=z.$$

må ha $(x,y,z) = \underline{(x,2x,2x)}$

Fra bibet: $g(x,y,z)=500$
$\Rightarrow 4x^3=500 \Rightarrow x^3=125$
$\Rightarrow x=5$.

Flere bibetingelser

Teorem (Lagrange)

Anta at U er en åpen delmengde av $\mathbb{R}^n$ og at $f, g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er funksjoner med kontinuerlige partiellderiverte. Dersom $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ og $\vec{x}_0 \in U$ er et lokalt maks- eller min-punkt for f på mengden

$$A = \{ \vec{x} \in U : g_1(\vec{x}) = b_1, \dots, g_m(\vec{x}) = b_m \},$$

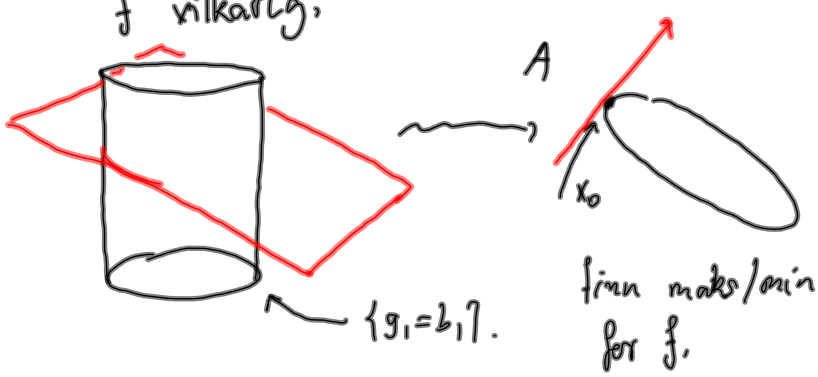
så er enten $\nabla g_1(\vec{x}_0), \dots, \nabla g_m(\vec{x}_0)$ lineært avhengige, eller

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \cdot \nabla g_1(x_0) + \lambda_2 \cdot \nabla g_2(x_0) + \dots + \lambda_m \cdot \nabla g_m(x_0).$$

"Bevis": $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 \qquad b_1 = 1$

$g_2(x,y,z) = 2x + 3y - z \qquad b_2 = 0.$

f vilkårlig.



finn maks/min for f.

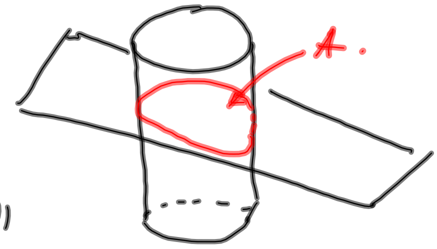
Anta at x_0 er et ekstrempunkt.

Eksempel: Som i "kris"

$g_1(x,y,z) = x^2+y^2$, $b_1=1$

$g_2(x,y,z) = 2x+3y-z$ $b_2=0$

$f(x,y,z) = z$.



Se at gradientene til g_1 og g_2 e lineært uavh.

$\nabla f(x,y,z) = (0,0,1)$

$\nabla g_1(x,y,z) = (2x, 2y, 0)$

$\nabla g_2(x,y,z) = (2,3,-1)$.

Må løse $\nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \cdot \nabla g_1(x,y,z) + \lambda_2 \nabla g_2(x,y,z)$.

$(0,0,1) = \lambda_1 \cdot (2x, 2y, 0) + \lambda_2 \cdot (2,3,-1)$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 \cdot 2x + 2\lambda_2 = \lambda_1 \cdot 2x - 2 \\ 0 &= \lambda_1 \cdot 2y + 3\lambda_2 = \lambda_1 \cdot 2y - 3 \end{aligned}\right\}$$

$1 = -\lambda_2 \rightsquigarrow \lambda_2 = -1$

$2\lambda_1 \cdot x = 2$ $x = \frac{1}{\lambda_1}$

$2\lambda_1 \cdot y = 3$ $y = \frac{3}{2\lambda_1}$

Fra sirkelet: $x^2+y^2=1$ $(\frac{1}{\lambda_1})^2 + (\frac{3}{2\lambda_1})^2 = 1$

$1 + \frac{9}{4} = \lambda_1^2$

$\frac{13}{4} = \lambda_1^2$ $\underline{\lambda_1 = \pm\sqrt{\frac{13}{4}}}$

Nå er det rett frem å finne x, y, z .

Gradientmetoden

Vil fremdeles finne maks/min-punkter for funksjon $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ med kont. partiellderiverte.

Anta at vi er gitt f. Anta at $\vec{a}_0 \in \mathbb{R}^n$ er et min.punkt for f.

Nivåkurver for f nær $\vec{a}_0$.

Gjett et min-punkt $\vec{x}_0$.

$$r(t) = \vec{x}_0 - t \cdot \nabla f(\vec{x}_0)$$

se på $f(r(t))$: ønsker nå å finne min.punkt for denne.

Deriver $f(r(t))$ m.h.p. t og løs $= 0$.

$$\frac{d}{dt} f(r(t)) \overset{\text{kjerneregel}}{=} \nabla f(r(t)) \cdot r'(t)$$

$$= -\nabla f(\vec{x}_0 - t \cdot \nabla f(\vec{x}_0)) \cdot \nabla f(\vec{x}_0).$$

Løs $\nabla f(\vec{x}_0 - t \cdot \nabla f(\vec{x}_0)) \cdot \nabla f(\vec{x}_0) = 0$

Finne første nullpunkt t_0.

Sett $\vec{x}_1 := \vec{x}_0 - t_0 \cdot \nabla f(\vec{x}_0)$.

.... Fortsett.

MATLAB: Kan lage script som utfører disse operasjonene.

Kalkulus.

Rekker (Kap. 12).

DEF: En rekke er en uendelig sum

$\sum_{j=0}^{\infty} a_j$, $a_j \in \mathbb{R}$. ($a_j \in \mathbb{C}$).

Eks: Geometrisk rekke $\sum_{j=0}^{\infty} r^j$

delsum $\sum_{j=0}^{m} r^j \underset{r\neq 1}{=} \frac{1-r^{m+1}}{1-r}$

så at vi har konvergens for $|r|<1$.

DEF: La $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ være en rekke.

De endelige summene $s_m = \sum_{j=0}^{m} a_j$

kalles delsummer.

Vi sier at rekka konvergerer dersom følgen av delsummer konvergerer.

Hvis rekka ikke konvergerer sier vi at den divergerer.

Prop (Divergenstest)

Dersom $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ konvergerer så har vi $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$.

Så dersom $\lim_{j\to\infty} a_j \neq 0$, så divergerer rekka.
eller ikke eksisterer,

Bevis: Dersom rekka konvergerer har vi

$$\sum_{j=0}^{m} a_j = S_m \xrightarrow[m\to\infty]{} S$$

Gitt $\varepsilon > 0$ så fins $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.a.
$|S_m - S| < \frac{\varepsilon}{2}$ når $m \geq N_\varepsilon$.

For $m > N_\varepsilon$: $|a_m| = |S_m - S_{m-1}|$

$$= |S_m - S + S - S_{m-1}|$$

$$\leq |S_m - S| + |S - S_{m-1}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

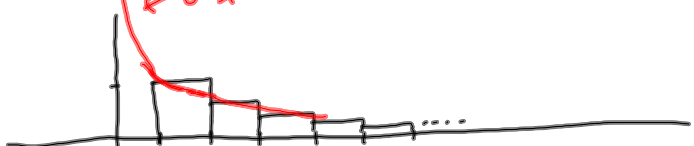
∎

Merk: Det er ikke slik at dersom $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$ så konvergerer rekka!

Eks: $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

Bevis for at denne rekka ikke konvergerer.

$y = \frac{1}{x}$



Det at $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ skulle konvergere er det som at summen av arealene av boksene skulle konvergere.

Men summen av arealene av boksene må være større enn $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$.

$$= \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \lim_{n\to\infty} [\ln x]_1^n = \lim_{n\to\infty} \ln(n) = \infty.$$

Positive rekker

$\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ kalles en positiv rekke dersom $a_j \geq 0$ for alle j. Da blir delsummene S_n en voksende følge. En voksende følge konvergerer hviss den er begrenset.

Prop (Integraltest)

La $f: [1,\infty) \to \mathbb{R}$ være en positiv avtagende funksjon. Da konv. rekka $\sum_{j=1}^{\infty} f(j)$ hviss $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergerer.

Setning: $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^p}$ konverger hviss $p > 1$.