Å finne inversen til en matrise

La A være en $(n\times n)$-matrise, og la B være $(n\times n)$-matrisen $B=[\vec{b}_1 | \vec{b}_2 | \dots | \vec{b}_n]$. (#)

Da er $AB = [A\vec{b}_1 | A\vec{b}_2 | \dots | A\vec{b}_n]$

Dersom vi vil finne en invers til A, ser vi etter B s.a. $AB = I_n = [\vec{e}_1 | \vec{e}_2 | \dots | \vec{e}_n]$.

Så vi må løse $A\vec{b}_j = \vec{e}_j$ for $j=1,\dots,n$, og danne matrisen (#).

Setter:
$$[A | \vec{e}_1 | \vec{e}_2 | \dots | \vec{e}_n] \overset{\text{radreduser}}{\sim}$$
$$\sim [I_n | \vec{b}_1 | \vec{b}_2 | \dots | \vec{b}_n]$$

Da løses $\vec{b}_j$ ligningen $A\vec{b}_j = \vec{e}_j$ for $j=1,\dots,n$, så B som i (#) er inversen til A.

Eks: La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ Finn A^{-1}.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{II-I}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{I \div 2II}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{så } A^{-1} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}}$$

$C = [A | I_n]$ rref(C)
inv(C).

4.6. Lineærkombinasjoner

La

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

Da er

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \cdots + a_{1n} \cdot x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \cdots + a_{2n} x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 \cdots + a_{nn} x_n \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \cdots + x_n \cdot \vec{a}_n,$$

der $\vec{a}_j$ er j'te søyle i A.

Dermed kan matriseligningen $A\vec{x} = \vec{b}$ skrives som

$$x_1 \cdot \vec{a}_1 + \cdots + x_n \cdot \vec{a}_n = \vec{b}.$$

DEF: Anta at $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$. Vi sier at $\vec{b}$ i $\mathbb{R}^m$ er en lineær-kombinasjon av a_j'ene dersom det eksisterer $x_j \in \mathbb{R}$ for $j = 1, \dots, n$ s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \vec{a}_j = \vec{b}.$$

Altså dersom $A\vec{x} = \vec{b}$.

Setning: En vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ er en lineærkombinasjon av vektorene $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ hviss og bare hvis den siste kolonnen trappematrisen til $[\vec{a}_1 | \vec{a}_2 | \dots | \vec{a}_n | \vec{b}]$ ikke er pivot.

Eksempel: Avgjør om $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ er en lineærkombinasjon av $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{II} - \text{I}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Den siste søylen er ikke pivot, så $\vec{b}$ er en lineærkombinasjon av $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ og $\vec{a}_3$.

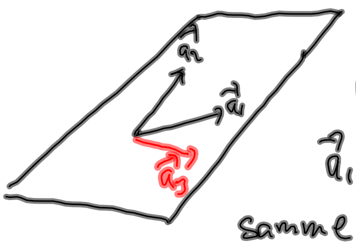
For store matriser bruk rref($[A|\vec{b}]$) i MATLAB.

Def: Dersom $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ så er <u>spennet</u> til $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ mengden av alle lineærkombinasjoner

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n,$$

for $x_j \in \mathbb{R}$. Vi skriver $sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$.

Eks $\underline{\mathbb{R}^3}$



Merk at spennet til $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ kan være det samme som spennet til a_1, a_2.

apr 9-08:37

Setning: $Sp(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n)=\mathbb{R}^m \quad (\vec{a}_j\in\mathbb{R}^m)$

hvis og bare hvis alle rade i trappematrisen til $[\underbrace{\vec{a}_1|\dots|\vec{a}_n}_{A}]$ inneholde et pivotelement.

Bevis: $Sp(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n)=\mathbb{R}^m \iff$ vi kan løse ligningen $A\vec{x}=\vec{b}$ for alle $\vec{b}\in\mathbb{R}^m$.

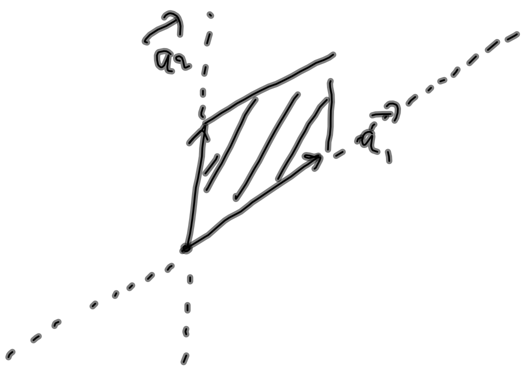
Eksempel: Avgjør om $\begin{pmatrix}1\\3\\7\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\6\\1\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ utspennes $\mathbb{R}^4$.

h

Danner A som før og brukes matlab til å finn at $\mathrm{rref}(A)=I_n$.

Korollar: Dersom $Sp(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n)=\mathbb{R}^m$ så er $n\geq m$.

Bevis: Dersom $m>n$ er det ikke plass til pivotelementer på hver rad



$Sp\{\vec{a}_1\}$ er $\{x_1\vec{a}_1 : x_1$

$Sp(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$

Lineær uavhengighet

Gitt $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, $A = [\vec{a}_1 | \dots | \vec{a}_n]$, har vi sett at ligningen $A\vec{x} = \vec{b}$ kan ha ingen, én, eller uendelig mange løsninger.

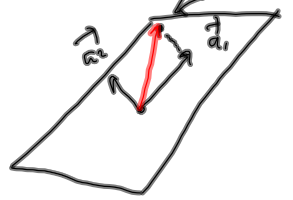
Vi sier at $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige dersom ligningen $A\vec{x} = \vec{b}$ har ingen eller nøyaktig en løsning for alle $\vec{b}$.

DEF: $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ er lineært uavhengige dersom alle $\vec{b} \in Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ kan skrives som

$$\vec{b} = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \vec{a}_j$$

på nøyaktig en måte.

$\mathbb{R}^3$



$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = 1 \cdot \vec{a}_1 + 1 \cdot \vec{a}_2$

$\vec{a}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$

Setning: Følgende er ekvivalent:

(i) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ er lin. uavhengige,

(ii) $\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{a}_j = \vec{0} \Rightarrow x_j = 0$ for $j = 1, \dots, n$.

Bevis: (i) $\Rightarrow$ (ii) per. def.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Dersom ikke (i) eksisterer

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \vec{a}_j = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j \cdot \vec{a}_j$$

der $x_k \neq \tilde{x}_k$ for minst en k.

Får

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j - \tilde{x}_j) \vec{a}_j = 0,$$

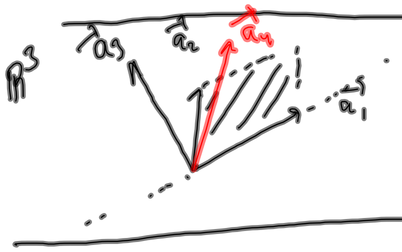
der $x_k - \tilde{x}_k \neq 0$. Så heller ikke (ii). ∎

Setning: Vektorene $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n$ er lineært uavh. hviss alle kolonner i trappematrisen til $\underbrace{[\vec{a}_1|\cdots|\vec{a}_n]}_{A}$ er pivot.

Bevis: Tilsvarer å bestemme antall løsninger til $A\vec{x}=0$. ∎

Korollar: Dersom $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ er lineært uavhengige så er $n \leq m$.

Bevis: Dersom $n > m$ e det ikke plass til nok pivotelementer.



Setning: Gitt vektorer $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ kan vi alltid finne en undermengde $\vec{a}_{i_1},\dots,\vec{a}_{i_k}$ som e lineært uavh. og s.a. $Sp(\vec{a}_{i_1},\dots,\vec{a}_{i_n}) = Sp(\vec{a}_1,\dots,a_n)$.

Bevis: Danner $[\vec{a}_1|\cdots|\vec{a}_n] \sim$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & & & \\ 0 & 1 & \cancel{*} & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da er det s.a. $(\vec{a}_{i_1},\dots,\vec{a}_{i_n})$ av vektorer s.a. de tilsvarende søylene i den reduserte matrisen er pivot, er lineært uavh.

Vi ser også at søylene som ikke e pivot kan skrives som lineærkombinasjoner av de pivotsøylene som ligger til venstre. ∎

Basises

DEF: En samling vektorer $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ kalles en basis dersom de er lineært uavhengige og spenner ut $\mathbb{R}^m$.

Merk: har sett at $m \geq n$ og $n \geq m$, så $n = m$.

Eks: $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$. $(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \vec{e}_j$.

Hvordan sjekke vi om $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ er en basis for $\mathbb{R}^n$? Vi danner matrisen $A = [\vec{a}_1 | \cdots | \vec{a}_n]$ og sjekker om $A \sim I_n$. Dette er også ekvivalent med at A er inverterbar.

Teorem: La $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ være en basis for $\mathbb{R}^n$ og la $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n \in \mathbb{R}^m$.
Da fins en entydig lineæravbildning $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s.a. $T(\vec{a}_j) = \vec{w}_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Bevis: Definer $T(\vec{a}_j) := \vec{w}_j$ og utvid ved linearitet:
Alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ kan skrives entydig

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \vec{a}_j$$

Def: $$T(\vec{x}) := \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot T(\vec{a}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \vec{w}_j.$$

Entydig: La T_1, T_2 være slike.

$$T_1(\vec{x}) = T_1\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{a}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(\vec{a}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \vec{w}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j T_2(\vec{a}_j) = T_2\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{a}_j\right)$$

$$= T_2(\vec{x}) \quad \blacksquare$$