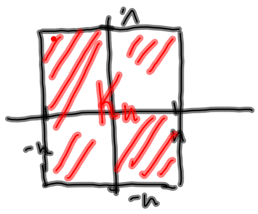
Uegentlige integraler.

$K_n := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|,|y| \le n\}$.



A er en mengde i $\mathbb{R}^2$ s.a

$A\cap K_n$ er Jordan målbar for all $n\in\mathbb{N}$.

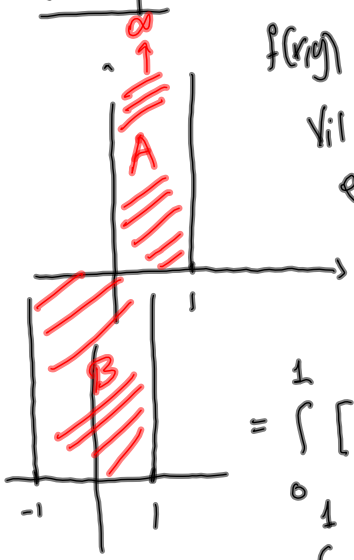
f er en kont. funksjon på A s.a

$f(x)\geq 0$ for alle $x\in A$.

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\iint_{A\cap K_n} f(x,y)\,dx\,dy,$$

dersom grensen eksisteres.

Eksempel: $A=[0,1]\times[0,\infty)$



$f(x,y)=\dfrac{xy}{1+y^2}$

Vil sjekke om integralet konvegeres eller divegeres

$$\iint_{A\cap K_n} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^n \frac{xy}{1+y^2}\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x}{2}\ln(1+y^2)\right]_0^n dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{2}\ln(1+n^2)\,dx = \frac{1}{4}\cdot\ln(1+n^2).$$

Siden $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\ln(1+n^2)=\infty$ divegeres integraler.

Merk: $\iint_{K_n\cap B} f(x,y)\,dx\,dy = 0$, for alle n.

Valget av bruk av kvadrater K_n var litt vilkårlig:

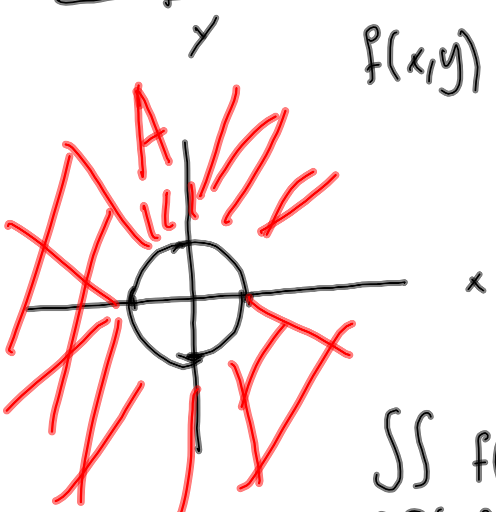
Setning 6.8.2 Anta at $A \subset \mathbb{R}^2$ er en delmengde s.a. $A \cap \underline{B(0,n)}$ er Jordan-målbar for alle $n \in \mathbb{N}$. Dersom $f: A \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon, $f(x) \geq x$ for alle $x \in A$, da er

$B(0,R) := \{(x,y) : x^2+y^2 \leq R^2\}$.

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{A\cap B(0,n)} f(x,y)\,dx\,dy .$$

Eksempel: La $A = \{(x,y) : x^2+y^2 \geq 1\}$.

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$



Vil sjekke om $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ konvergerer.

$$\iint_{A\cap B(0,n)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_1^n \frac{1}{r^3}\cdot r\,dr\,d\theta$$

Bruker polarkoord $(r\cos\theta, r\sin\theta)$

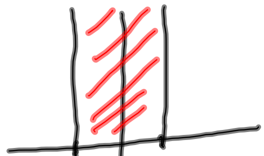
$$= \int_0^{2\pi}\int_1^n \frac{1}{r^2}\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{-1}{r}\right]_1^n = 2\pi\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Så $\lim_{n\to\infty} \iint_{A\cap B(0,n)} f(x,y)\,dx\,dy = 2\pi$, så integralet konvergerer. ∎

mar 14-14:29

Integrasjon av generelle funksjoner



$f(x,y)$	$\frac{xy}{1+y^2}$

DEF: La f være kont. på et område A,

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{dersom } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

$$f_{\div}(x) := \begin{cases} -f(x) & \text{dersom } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Ser at $f = f_+ - f_-$.

DEF 6.8.3 La A være en delmengde av $\mathbb{R}^2$ s.a. $K_n \cap A$ er Jordan-målbar for alle $n \in \mathbb{N}$. La f være en kont. funksjon på A. Vi sier at $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ konvergerer dersom både $\iint_A f_+(x,y)\,dx\,dy$ og $\iint_A f_{\div}(x,y)\,dx\,dy$ konvergerer. I så fall setter vi

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy := \iint_A f_+(x,y)\,dx\,dy - \iint_A f_{\div}(x,y)\,dx\,dy.$$

Merk: $\lim\limits_{n\to\infty} \iint_{A\cap K_n} \underbrace{(f_+ + f_{\div})}_{|f|.}(x,y)\,dx\,dy < \infty.$

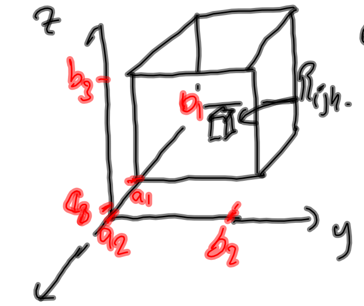
Så f er integrer dersom $|f|$ er integrerbar. (absolutt integrerbar).

- Dersom du vet at $|f|$ er integrerbar over A, har vi at

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{A\cap K_n} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Trippelintegraler

Begynne med kuber:



$\leftarrow$ kube $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$.

Vil integrere en funksjon f over R.

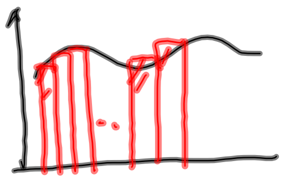
Partisjon Π :

$$a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b_1$$
$$a_2 = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b_2$$
$$a_3 = z_0 < z_1 < \cdots < z_l = b_3$$

$$R_{ijk} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k].$$

$$m_{ijk} := \inf_{x \in R_{ijk}} \{f(x)\}$$

$$M_{ijk} := \sup_{x \in R_{ijk}} \{f(x)\}$$



$$|R_{ijk}| := (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}).$$

$$N(\Pi) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} m_{ijk} \cdot |R_{ijk}|$$

$$\emptyset(\Pi) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} M_{ijk} \cdot |R_{ijk}|.$$

$$\underline{\iiint_R} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz := \sup_{\Pi} \{N(\Pi)\},$$

kalles nedreintegralet

$$\overline{\iiint_R} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz := \inf_{\Pi} \{\phi(\Pi)\}.$$

<u>DEF 6.9.1</u> En begrenset funksjon $f: R \to \mathbb{R}$ sies å være integrerbar dersom

$$\underline{\iiint_R} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \overline{\iiint_R} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz .$$

I så fall setter vi

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \underline{\iiint} = \overline{\iiint}$$

<u>Setning 6.9.2</u> Enhver kontinuerlig funksjon $f: R \to \mathbb{R}$ er integrerbar.

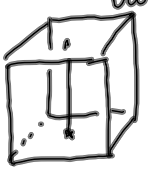
<u>Bevis</u>: Samme som i dimensjon 2.

<u>Setning 6.9.3</u> (Itererte integraler). Gitt en kube $R = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$ og en kontinuerlig $f: R \to \mathbb{R}$, så er

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_A \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx ,$$

der $A = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$.



Valg av integrasjonsrekkefølge er som i 2 variable likegyldig.

Eksempel: $R = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$

$f(x,y,z) = x^2 y z^3$.

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 x^2 y z^3\,dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left[\frac{1}{4} x^2 y z^4 \right]_0^1 dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{4} x^2 y\,dy \right) dx$$

$$= \dots = \frac{1}{24}. \quad \blacksquare$$

MATLAB: triplequad(@(x,y,z)(x.^2.*y.*z.^3),0,1,0,1,0,1)

Integrere over generelle begrensete områder i $\mathbb{R}^3$.

DEF 6.9.4: La S være et begrenset område i $\mathbb{R}^3$. Velg en kube R s.a. $S \subset R$.

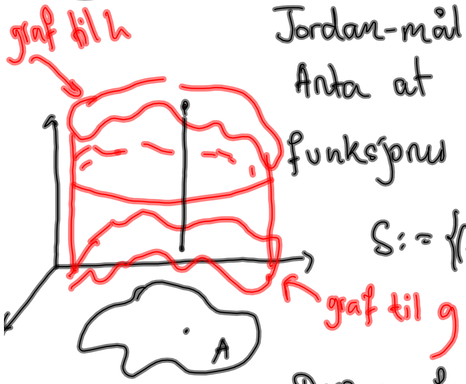
Dersom $f: S \to \mathbb{R}$ er en begrenset funksjon settes vi

$$f_S(x) := \begin{cases} f(x) & \text{dersom } x \in S \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

for $x \in R$. Vi sier at f er integrerbar på S dersom f_S er integrerbar på R.

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz := \iiint_R f_S(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Setning 6.9.5 Anta at A er en lukket begrenset Jordan-målbar mengde i $\mathbb{R}^2$.



Anta at $g, h : A \to \mathbb{R}$ er kontinuerlige funksjoner s.a. $g \le h$.

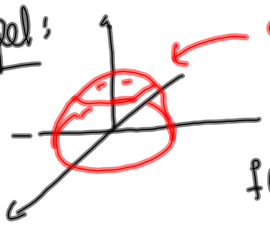
$$S := \{(x,y,z) : (x,y) \in A \text{ og } g(x,y) \le z \le h(x,y)\}$$

Dersom f er kontinuerlig på S, så er f integrerbar, og

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_A \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy .$$

Kan også velge A i de andre koordinatplanene med funksjoner g, h i den gjenværende variabelen.

Eksempel:



$$S = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le z \le \sqrt{1-(x^2+y^2)}\}$$

$f(x,y,z) = z$.

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_A \left(\int_0^{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} z\,dz \right) dx\,dy$$

$$= \iint_A \left(\left[\tfrac{1}{2} z^2 \right]_0^{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} \right) dx\,dy = \frac{1}{2} \iint_A 1-(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\iint_A 1\,dx\,dy}_{= \pi/2} - \frac{1}{2} \underbrace{\iint_A x^2+y^2\,dx\,dy}_{= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3\,d\alpha\,dy}$$

$$\underline{\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3\,d\alpha\,dy} = \underline{ok}.$$