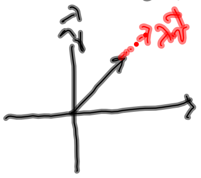
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot \det(A_1) - a_{12}\cdot \det(A_2) + \cdots \pm a_{1n}\cdot \det(A_n).$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots & + \\ - & + & - & + & & & \\ \vdots & & & & & & \\ + & - & + & \cdots & & & + \end{bmatrix}$$

Eks:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

Egenverdier og egenvektorer

DEF: La A være en $(n\times n)$-matrise. En vektor $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ er en egenvektor for A dersom $\vec{v}\neq 0$, og det fins et tall λ s.a. $A\cdot\vec{v} = \lambda\vec{v}$.



Merk: Dersom $\vec{v}$ er en egenvektor for A, så er $b\cdot\vec{v}$ en egenvektor for A for alle $b\neq 0$.

$$A(b\cdot\vec{v}) = b\cdot A(\vec{v}) = b\cdot\lambda\cdot\vec{v} = \lambda\cdot b\vec{v}.$$

Hvordan kan vi finne egenvektorer og verdier?

$$A\vec{v} = \lambda\cdot\vec{v}, \quad \vec{v}\neq\vec{0}.$$

$$\lambda\vec{v} - A\vec{v} = 0$$

$$\underbrace{(\lambda I_n - A)}_{B}\vec{v} = 0$$

Vi har sett at denne matrise-ligningen har en ikke-triviell løsning hviss $\det(B) = 0$:

Setning: λ er en egenverdi for A hviss $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

Eks: La $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ og finn egenverdier og egenvektorer for A.

Må se på $\det(\lambda I_2 - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - A$

$= (\lambda-1)\cdot(\lambda-2)$.

Ser at egenverdiene er $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$.

E.vektor for $\lambda_1 = 1$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$x = x$

$x + 2y = y \quad y = -x$. Velger $\underline{\underline{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$.

E.vektor for $\lambda_2 = 2$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

$x = 2x \quad x = 0$

$x + 2y = 2y$

Velger $\underline{\underline{\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$.

MATLAB: $\underline{[U, V] = eig(A)}$.

Eks: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ser etter egenverdier:

$(\lambda I_2 - A) = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 + 1 = \underbrace{\lambda^2 - 2\lambda + 2}_{\text{karakteristisk polynom.}}$.

$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}, \quad = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-1}}{2}$.

Fins ingen reelle egenverdier!

Men vi har komplekse egenverdier $\lambda_1 = 1 + i$

$\lambda_2 = 1 - i$.

Egenvektorer: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)\cdot x \\ (1+i)\cdot y \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = (1+i)$

$\lambda_2 = (1-i)$

$\overline{x+iy} = x-iy$

$x+y = (1+i)\cdot x$

$y-x = (1+i)\cdot y$

$x = -iy$

$y = ix$, Velger $\underline{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}}$,

Andre egenvektor: $\underline{\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}}$

Merk:

- Algebraens fundamentalteorem forteller oss at alle n-tegrads polynomer har minst én rot. Så alle matriser har minst en egenverdi dersom vi tillater komplekse e.v.
- Som i eksempelet over kommer alltid komplekse egenverdier og -vektorer i konjugerte par.

<u>Eks:</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ finn egenverdier og egenvektorer.

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2.$$

Ser at det kun er én egenverdi $\lambda_1 = 1$.

<u>Egenvektor:</u> $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$x = x$

$2x+y = y \Rightarrow x = 0$ velger $\underline{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

Ser at det også er kun én egenvektor.

<u>OBS:</u> Det er ikke generelt slik at kun én egenverdi $\Rightarrow$ kun én egenvektor. <u>Eks:</u> $A = I_n$.

Basis av egenvektorer

DEF: Vi sier at en $(n\times n)$-matrise A har en **basis av egenvektorer** dersom den har lineært navhengige egenvektorer $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$, med tilhørende egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Setning: Dersom en $(n\times n)$-matrise A har n forskjellige egenverdier så har A en basis av egenvektorer.

Bevis: Egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Løser $A\vec{v} = \lambda_j \cdot \vec{v}$.

DEF: En $(n\times n)$-matrise $A = (a_{ij})$ er **symetrisk** dersom $a_{ij} = a_{ji}$ for all i og j.

Eks: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ speiling over diagonalen; $\underline{A = A^T}$.

Spektralteorem for sym. matriser: En symetrisk matrise har alltid en basis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ av egenvektorer. Videre kan disse velges s.a. de er ortogonale, dvs.

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \begin{cases} 1 & \text{dersom } i=j, \\ 0 & \text{dersom } i\neq j. \end{cases}$$

Anvendelser - dynamiske systemer.

Anta at $\vec{x}_0 = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ beskriver tilstanden til et system ved tid $t=0$.

Anta at overgangen i systemet fra tid $t=0$ til $t=1$ er gitt ved multiplikasjon med en matrise A, dvs: $\vec{x}_1 = A\vec{x}_0$,

Går en tilsvarende til: $\vec{x}_2 = A \cdot \vec{x}_1 = A \cdot A \cdot \vec{x}_0$ beskriver tilstanden ved tid $t=2$.

Får at $x_n = A^n \vec{x}_0$ beskriver tilstanden ved tid $t=n$. Dersom vi ønsker å forstå hvordan systemet utvikler seg over lang tid, må vi forstå $A^n \vec{x}_0$ når $n \to \infty$.

Eks: La $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ være vektoren der x = antall byttedyr og y = antal rovdyr i en populasjon.

$$A = \begin{bmatrix} 1{,}2 & -0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{bmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \cdot x - 0{,}2 \cdot y \\ 0{,}1 \cdot x + 0{,}9 \cdot y \end{pmatrix}$$

Vil undersøke $A^n \vec{x}_0$.

Anta at A har en basis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ av egenvektorer med tilhørende egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Skriv: $\vec{x}_0 = a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$, $a_n \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} A\vec{x}_0 &= A(a_1 \cdot \vec{v}_1) + A(a_2 \vec{v}_2) + \dots + A(a_n \vec{v}_n) \\ &= a_1 \cdot A \cdot \vec{v}_1 + \dots + a_n \cdot A \cdot \vec{v}_n \\ &= a_1 \cdot \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + a_n \cdot \lambda_n \cdot \vec{v}_n \end{aligned}$$

$$A^2 \vec{x}_0 = A(A\vec{x}_0) = a_1 \cdot \lambda_1^2 \cdot \vec{v}_1 + \dots + a_n \cdot \lambda_n^2 \cdot v_n.$$

$$\vdots$$

$$\boxed{A^m \cdot \vec{x}_0 = a_1 \cdot \lambda_1^m \cdot \vec{v}_1 + \dots + a_n \cdot \lambda_n^m \cdot \vec{v}_n.}$$

apr 16-09:26

Eks: $A = \begin{bmatrix} 4/3 & 1/6 & -2/3 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ 5/3 & -1/6 & -1/3 \end{bmatrix}$. Sett $\vec{x}_0 = (100, 200, 300)$, og forsøk å forstå $A^n \vec{x}_0$ når $n \to \infty$.

Steg 1: Finn egenverdier og egenvektorer for A..

MATLAB: $([U,V] = eig(A))$

$A = sym(A)$, $[U,V] = eig(A)$

$\lambda_1 = 1/2 - i/2$

$\lambda_2 = 1/2 + i/2$

$\lambda_3 = 1$.

$\vec{v}_1 = (7/13 - i \cdot 4/13,\ 5/13 - i/13,\ 1)$

$\vec{v}_2 = \overline{\vec{v}_1}$.

$\vec{v}_3 = (1,2,1)$,

Steg 2: Uttrykk $\vec{x}_0$ som en lineær kombinasjon av $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ og $\vec{v}_3$.

sett $\vec{b} = inv(U) * \vec{x}_0$,

Dette gir:

$$\vec{x}_0 = \underbrace{(350/3 - 150i)}_{a_1} \cdot \vec{v}_1 + \underbrace{(350/3 + 150i)}_{a_2} \cdot \vec{v}_2 + 200/3 \cdot \vec{v}_3,$$

Steg 3: Se på

$$A^m x_0 = \lambda_1^m \cdot a_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2^m \cdot a_2 \cdot \vec{v}_2 + \lambda_3^m \cdot 200/3 \cdot v_3.$$

$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 1/2 - i/2 \\ \lambda_2 = 1/2 + i/2 \end{array}\right\}$ ser at $|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1$, dvs at $\lim_{m\to\infty} \lambda_1^m = \lim_{m\to\infty} \lambda_2^m = 0$,

og $\lambda_3 = 1$, så dvs at

$$\underline{\lim_{m\to\infty} A^m x_0 = 200/3 \cdot (1,2,1)}.$$

apr 16-09:44