Rekker av funksjoner.

$\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ ← rekke.

Skal se på rekker $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)$, der f_j er en funksjon på en mengde $A \subset \mathbb{R}$.

Merk: For en fiksert $x_0 \in A$ så er $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_0)$ en rekke.

<u>Eksempel</u>: $\sum_{j=0}^{\infty} x^j$ konvergerer for $|x|<1$
divergerer for $|x|\geq 1$.

For $|x|<1$: $\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{1}{1-x}$.

La $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)$ være en rekke av funksjoner på en mengde A. Definer delsummer

$$S_m(x) = \sum_{j=0}^{m} f_j(x).$$

<u>DEF</u>: Rekka konvergerer <u>punktvis</u> mot en funksjon $f: A \to \mathbb{R}$ dersom $\lim_{j\to\infty} S_j(x) = f(x)$ for alle $x \in A$.

Vi sier at rekka konvergerer uniformt mot f på A dersom det for $\varepsilon>0$ fins $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.a. $|f(x)-S_j(x)| < \varepsilon$ når $j \geq N_\varepsilon$.

Weierstrass' M-test: La $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ være en rekke av funksjoner på A. Anta at det fins en rekke $\sum_{j=0}^{\infty} M_j$ som konvergerer, og s.a.

$|f_j(x)| \leq M_j$ for alle j og alle $x \in A$.

Da konvergerer rekka uniform og absolutt på A.

$\sum_{j=0}^{\infty} |f_j|$ konv.

Bevis: 1 Vises $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)$ konvergerer punktvis.

For hver fikserte $x_0 \in A$ så er $|f_j(x_0)| \leq M_j$, så vi har sett at $\sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x_0)|$ er konvergent, så $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_0)$ er konvergent.

Definer $f(x_0) := \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_0)$.

2. Uniform konv. Fiks $\varepsilon > 0$,

Siden $\sum_{j=0}^{\infty} M_j$ konv. fins N_ε s.a.

$\sum_{j=k}^{l} M_j < \varepsilon$ for all $N_\varepsilon \leq k < l$.

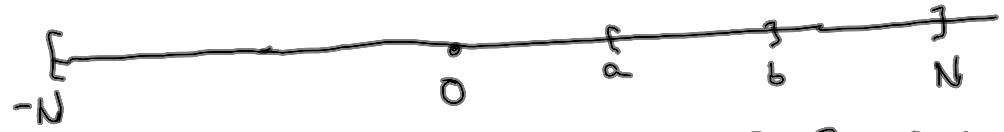
Da: $\left| \sum_{j=k}^{l} f_j(x) \right|$

$$\leq \sum_{j=k}^{l} |f_j(x)| \leq \sum_{j=k}^{l} M_j < \varepsilon.$$

Så konvergensen er uniform. ∎

mai 16-14:24

Eksempel: Vis at $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ konvergerer uniformt på ethvert intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$.



Velg N så stor at $[a,b] \subset [-N,N]$.

For $x \in [a,b]$ $\quad |x^j| \leq (2N)^j \frac{N^j}{(2N)^j} = (2N)^j \cdot (\frac{1}{2})^j$

Så $$\frac{|x^j|}{j!} \leq \underbrace{\frac{(2N)^j}{j!} \cdot (\frac{1}{2})^j}_{= M_j}$$

Må vise at $\sum_{j=0}^{\infty} M_j$ er konvergent.

Observer at $\frac{(2N)^j}{j!}$ er en begrenset følge:

$$\frac{2N}{1} \cdot \frac{2N}{2} \cdot \frac{2N}{3} \cdots \frac{2N}{2N} \cdot \frac{2N}{2N+1} \cdots$$

vokser ikke mer etter dette.

Dvs: $\frac{|x^j|}{j!} \leq M \cdot (\frac{1}{2})^j$ for alle j,

så vi har konvergens.

Eks: Finn konvergensområdet til
$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{2j}}{j^3+j^2}.$$

- For $|x| \leq 1$ så e $|x^{2j}| \leq 1$ for alle j.

  så $\left|\frac{x^{2j}}{j^3+j^2}\right| \leq \frac{1}{j^3} \leq \frac{1}{j^2}$ for $j > 1$.

  så konvergens for $|x| \leq 1$.

- For $|x| > 1$. Se på $\lim_{j\to\infty} \frac{|a_{j+1}|}{|a_j|}$

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\left(\frac{x^{2(j+1)}}{(j+1)^3+(j+1)^2}\right)}{\left(\frac{x^{2j}}{j^3+j^2}\right)} = \lim_{j\to\infty} \underbrace{\frac{x^{2(j+1)}}{x^{2j}}}_{= x^2} \cdot \underbrace{\frac{j^3+j^2}{(j+1)^3+(j+1)^2}}_{\xrightarrow{j\to\infty} 1}$$

$$= x^2 > 1$$

så vi har divergens.

Konvergens av potensrekker

Potensrekke : $\sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot (x-a)^j = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots$

der $a, a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{R}$.

Enklest: For $a=0$ $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$.

Eksempler:

- $\sum_{j=0}^{\infty} x^j$
- $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ $\left(= e^x\right)$
- $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$ $\left(= \sin x\right)$
- $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}$ $\left(= \cos x\right)$.

<u>Teorem</u>: La $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-a)^j$ være en potensrekke.

Da holder en av følgende:

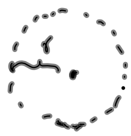
(i) Rekka konvergerer for alle x,

(ii) Rekka konvergerer bare for a,

(iii) Det fins en $r>0$ s.a. rekka konvergerer for $x \in (a-r, a+r)$, og divergerer for $x \notin [a-r, a+r]$. For $r' < r$ så er konvergensen uniform på $[a-r', a+r']$.

$\sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$, $c_j \in \mathbb{C}$.

I så fall kalles r <u>konvergensradien</u> til rekka.



Eksempler: Finn konvergensradien.

- $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\frac{|x|^{j+1}}{(j+1)!}}{\frac{|x|^j}{j!}} = \lim_{j\to\infty} \frac{j!}{(j+1)!} \cdot |x|$$

$$= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j+1} \cdot |x| < 1$$

så konv.radien er ∞

- $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$ $(= \sin x)$

Se på $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|x|^{2j+1}}{(2j+1)!}$, må konv. siden $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!}$ konv.

Absolutt konv. $\Rightarrow$ konv.

- $\sum_{j=0}^{\infty} (-1) \frac{x^{2j}}{(2j)!}$ Det samme.

<u>Bevis for Teorem:</u> $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x-a)^j$.

Anta for enkelhets skyld at $a=0$.

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j .$$

(i) Rekka konv. for alle x.

(ii) Rekka konv. bare for $x=0$,

(iii) Rekka konv. for x_0 og divergere for y_0

<u>Påstand:</u> Dersom $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ konvergere for x_0 så konvergere rekka også for all x med $|x| < |x_0|$.

<u>Bevis:</u> Fiks $|x| < |x_0|$.

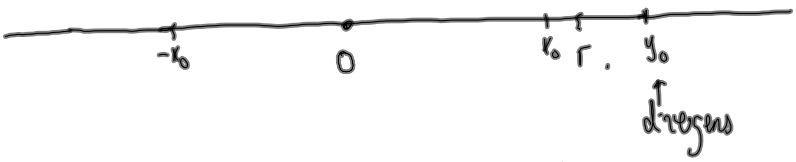
$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x_0^j \left(\frac{x}{x_0}\right)^j$$

Siden $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x_0^j$ konvergere må $\{a_j x_0^j\}$ være begrenset, dvs $|a_j x_0^j| \leq M$ for alle j.

Men da er $|a_j x^j| \leq M \cdot \underbrace{\left|\frac{x}{x_0}\right|}_{<1}^j$

Så vi har konvergens.

Se også at konvergensen er uniform på kompakte mengder i $(-x_0, x_0)$.



Vi ser nå at rekka ikke kan konvergere for noen y med $|y| > y_0$.

La $r = \text{maks}\{|x| : \text{rekka konv. for } x\}$. ■

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{1}{1-x}$$

<u>Setning</u>: Anta at $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ konv. på $(-r, r)$.
Da er $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ kont. på $(-r, r)$.

<u>Bevis</u>: Husk at dersom $r' < r$ så er konvergensen uniform og absolutt på $[-r', r']$.

Gitt $\varepsilon > 0$ fins $N \in \mathbb{N}$ s.a.

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j x^j| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Se på $S_N(x) = \sum_{j=0}^{N} a_j \cdot x^j$. Dette er et polynom så det fins $\delta > 0$ s.a.
$|S_N(x) - S_N(x')| < \frac{\varepsilon}{3}$ når $|x - x'| < \delta$ og $x, x' \in [-r', r']$

Dersom $|x - x'| < \delta$ så har vi

$$\left| \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j - \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x')^j \right|$$

$$= \left| \sum_{j=0}^{N} a_j x^j + \sum_{j=N+1}^{\infty} a_j x^j - \sum_{j=0}^{N} a_j (x')^j - \sum_{j=N+1}^{\infty} a_j (x')^j \right|$$

$$\leq \left| \sum_{j=0}^{N} a_j x^j - a_j (x')^j \right| + \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j x^j| + \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j (x')^j|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

■

mai 16-15:33

Regning med potensrekker

$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ konvergensradius $r > 0$.

$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$.

$S_m(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$.

Ser at
- S_m e deriverbar med $S_m'(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot j \cdot x^{j-1}$
- S_m e integrerbar med $\int_0^x S_m(t)\,dt = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1} a_j \cdot x^{j+1}$.

Fristende å anta at $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ er deriverbar og at
- $f'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot a_j \cdot x^{j-1}$
- $\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1} \cdot a_j x^{j+1}$.

Setning: Anta at $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x-a)^j$ konvergerer på $(a-r, a+r)$. Da konvergerer rekka $\sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \cdot a_j (x-a)^{j+1}$ på $(a-r, a+r)$ og $\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) a_j (x-a)^{j+1}$.

Bevis: Anta at $a = 0$.
For $r' < r$ konvergerer rekka uniformt.
For $|x| \leq r'$

$$\int_0^x \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j \,dt = \int_0^x \sum_{j=0}^{N} a_j t^j \,dt + \underbrace{\int_0^x \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} a_j \cdot t^j \right) dt}_{< \varepsilon}.$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j+1} \cdot a_j t^{j+1}$$

Så rekka konv. og e integralet. ∎