Bevis for kjerneregel i flere variable

Thm: La $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, og la $G: A \to B$, $F: B \to \mathbb{R}^k$ være avbildinger. Dersom G er deriverbar i $a \in A$ og F er deriverbar i $b = G(a)$. Da er komposisjonen $H = F \circ G$ deriverbar i a, og $H'(a) = F'(G(a)) \cdot G'(a)$.

Bevis:

Husk: G er deriverbar i a betyr at

$$G(a+r) = G(a) + G'(a)\cdot r + \sigma_1(r),$$

der $\dfrac{\sigma_1(r)}{|r|} \xrightarrow[r \to 0]{} 0$.

F deriverbar i $b = G(a)$ betyr:

$$F(b+s) = F(b) + F'(b)\cdot s + \sigma_2(s)$$

der $\dfrac{\sigma_2(\ )}{|s|} \xrightarrow[r' \to 0]{} 0$.

$$F(G(a+r)) = F\big(G(a) + G'(a)\cdot r + \sigma_1(r)\big)$$

$$= F(b) + F'(b)\cdot\big(G'(a)\cdot r + \sigma_1(r)\big) + \sigma_2\big(G'(a)\cdot r + \sigma_1(r)\big)$$

$$= F(b) + F'(G(a))\cdot G'(a)\cdot r + \underbrace{F'(b)\cdot \sigma_1(r) + \sigma_2\big(G'(a)\cdot r + \sigma_1(r)\big)}_{:= \sigma_3(r)}.$$

Hvis vi klarer å vise at $\dfrac{\sigma_3(r)}{|r|} \xrightarrow[r \to 0]{} 0$ er vi fremme.

Kan se på hver for seg. $F'(b)\cdot\sigma_1(r)$ og $\boxed{\sigma_2\big(G'(a)\cdot r + \sigma_1(r)\big)}$

$\|F'(s)\cdot\sigma_1(r)\| \le M \cdot \|\sigma_1(r)\|$

Så for denne komp. følger estimat fra at G er deriverbar!