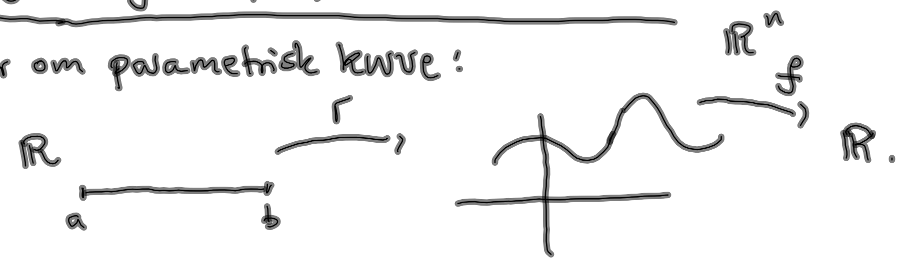
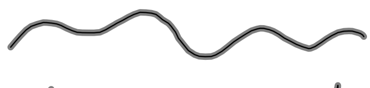
3.2 Kjerneregelen for parametriske kurver

Minner om parametrisk kurve:



$(f\circ r)'$

Eks: Er i $\mathbb{R}^3$ (rommet) og $r(t)$ er posisjonen til en partikkel ved tid $t \in \mathbb{R}$.



La $f(x_1, x_2, x_3)$ være temperaturen i (x_1, x_2, x_3).
Da er $G(t) = f(r(t))$ temp. der partikkelen befinner seg ved tid t.
Hvordan for temp. seg med t?

$$G'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(r(t))\cdot x_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(r(t))\cdot x_2'(t)$$

Kjerneregel
$$+ \frac{\partial f}{\partial x_3}(r(t))\cdot x_3'(t)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(r(t)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_3}(r(t))\right)\cdot\left(x_1'(t), \dots, x_3'(t)\right)$$

$$= \underline{\nabla f(r(t)) \cdot r'(t)}.$$

Setning 3.2.1: Hvis den parametriserte kurven $r(t)$ er deriverbar i t, og skalarfeltet $f(x)$ er deriverbar i $r(t)$, så er funksjonen $u(t) = f(r(t))$ deriverbar i t, og

$$u'(t) = \nabla f(r(t)) \cdot r'(t).$$

Bevis: Som i eksempelet over, men med et generelt antall variable.

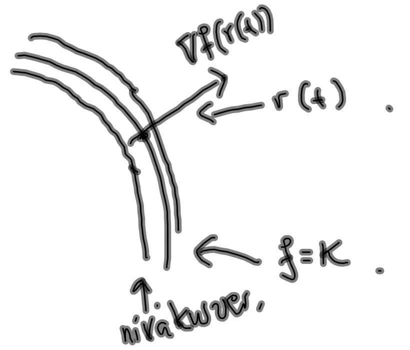
Eks: Anta at en partikkel $r(t)$ beveger seg i et område der en funksjon $f(x)$ er konstant.

Ser på: $u(t) = f(r(t)) = K$

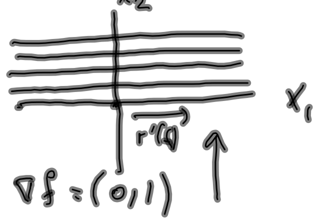
da er $u'(t) = 0$, så

$$\nabla f(r(t)) \cdot r'(t) = 0,$$

så $\nabla f(r(t)) \perp r'(t)$.



Eks: i $\mathbb{R}^2$ lar vi $f(x_1, x_2) = x_2$.



I eksempelet over hadde vi en funksjon f som beskriver temperaturen i et punkt $x \in \mathbb{R}^3$. Det er mer naturlig å la temperaturen også forandre seg med tid t, så vi ser på en funksjon $f(x, t)$.

Generelt

Gitt:
- En funksjon $f(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$,
- En parametrisert kurve $(r(t), t)$.

Ser på $u(t) = f(r(t), t)$.

Da får vi fra kjerneregelen:

$$\boxed{u'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(r(t),t) \cdot x_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(r(t),t) \cdot x_n'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(r(t),t)}$$

Eks: Anta at temperaturen i et punkt (x,y,z) ved tiden t er gitt ved

$$f(x,y,z,t) = t\cdot(x^2+y^2+z^2).$$

Parametrisert kurve $r(t) = (t, t\cos t, t\sin t)$,

$G(t) = f(r(t),t)$.

$$G'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(r(t),t)\cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(r(t),t)\cdot y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(r(t),t)\cdot z'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(r(t),t).$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2tx\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2ty\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 2tz\end{aligned}}$$

$$= 2t^2 + 2t^2\cos t(\cos t - t\sin t) + 2t^2\sin t(\sin t + t\cos t) + t^2 + t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t$$

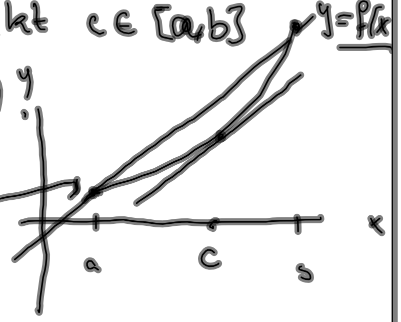
$$= 6t^2,$$

Middelverdisetningen i flere variable

Minner om M.V.S i en variabel: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er deriverbar. Da fins et punkt $c\in[a,b]$ s.a.

$$f(b)-f(a) = f'(c)\cdot(b-a)$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{stigningstall}} = f'(c),$$

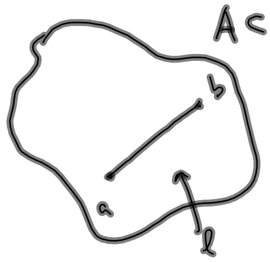


Setning 3.2.3: Anta at $f: A\to\mathbb{R}$ er deriverbar i et område som inneholder linjestykket mellom $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$.

Da fins et punkt $\mathbf{c}$ på linjestykket s.a.

$$f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}).$$

jan 29-08:48



$A \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$\exists c \in l$

$f(b)-f(a) = \nabla f(c)\cdot(b-a)$,

<u>Bevis:</u> Parametriserer l: $r(t) = a + t\cdot(b-a)$.
$t \in [0,1]$,

se på $g(t) = f(r(t))$.

$\exists$ betyr <u>eksisterer</u>

$\forall$ betyr <u>for alle</u>

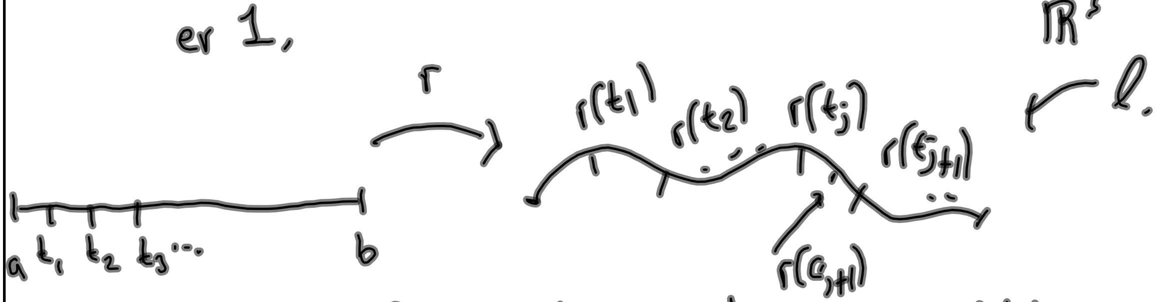
Ved M.V.S i en variabel $\exists\, t_0 \in [0,1]$
s.a. $g(1)-g(0) = g'(t_0)\cdot(1-0) = g'(t_0)$,

$\Leftrightarrow$ $f(b)-f(a) = \nabla f(r(t_0))\cdot r'(t_0)$
kjerneregelen setter $c = r(t_0)$,

$\Leftrightarrow$ $f(b)-f(a) = \nabla f(c)\cdot(b-a)$ ∎

Linjeintegraler over parametriserte kurver.

Eks: La $r : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ beskrive en partikkel som beveger seg, og vi antar at lengden av kurven $\ell = r([a,b])$ er 1.



La $f(x,y,z)$ være temperaturen i punktet (x,y,z). Hva er gjennomsnittstemp. for partikkelen?

Partisjoner $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = b$.

Estimat: Velg et punkt $c_j \in [t_{j-1}, t_j]$.

$$\text{gjennomsnitt} \simeq \sum_{j=1}^{N} f(r(c_j)) \cdot \text{lengden}([t_{j-1}, t_j])$$

$$v(c_j) = |r'(c_j)| \qquad \simeq \sum_{j=1}^{N} f(r(c_j)) \cdot v(c_j) \cdot (t_j - t_{j-1}) \qquad (*)$$

(Gitt at f er kont. og r deriverbar)

Kjenner igjen $(*)$ som en Riemann-sum for integralet

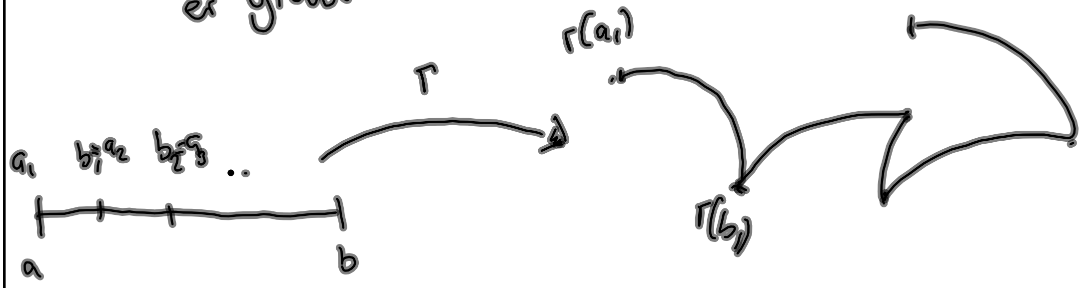
$$\int_a^b f(r(t)) \cdot v(t)\, dt,$$

$$= \int_a^b f(r(t)) \cdot |r'(t)|\, dt,$$

Definisjoner:

- En parametrisering $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ er **glatt** dersom r er kontinuerlig på $[a,b]$ og deriverbar på (a,b).

- En parametrisering $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ er **stykkevis glatt** dersom man kan dele opp $[a,b]$ i mindre intervaller $[a_j, b_j]$ s.a. $r : [a_j, b_j] \to \mathbb{R}^n$ er glatt.



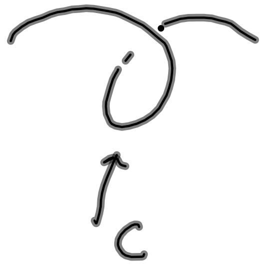
DEF 3.3.1: Anta at $f : A \to \mathbb{R}$ er en funksjon i n variable og at $r : [a,b] \to A$ er en stykkevis glatt parametrisering av en kurve C. Linjeintegralet $\int_C f\,ds$ er definert ved

$$\int_C f\,ds := \int_a^b f(r(t)) \cdot v(t)\,dt,$$

forutsatt at integralet eksisterer.

<u>Eks</u>: $r(t) = (t, \cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$.

$f(x,y,z) = xy + y^5 \cdot z$.



$v(t) = (1, -\sin t, \cos t)$

$v(t) = \sqrt{1 + \sin^2 t + \cos^2 t} = \underline{\sqrt{2}}$.

$$\int_C f\,ds = \int_0^{2\pi} f(r(t)) \cdot \underline{v(t)}\,dt = \sqrt{2} \cdot \int_0^{2\pi} t \cdot \cos t + \cos^5 t \cdot \sin t\,dt.$$

$$= \sqrt{2}\left[t \sin t - \cos t - \frac{1}{6} \cos^6 t \right]_0^{2\pi}$$

$$= 0.$$