Setning 3.3.2: Anta at r er en stykkevis glatt parametrisering av en kurve C, og at f, g er to kontinuerlige funksjoner s.a. $\int_C f\,ds$ og $\int_C g\,ds$ eksisterer. Da er

(i) $\int_C (f+g)\,ds = \int_C f\,ds + \int_C g\,ds$,

(ii) $\int_C (f-g)\,ds = \int_C f\,ds - \int_C g$,

(iii) $\int_C a\cdot f\,ds = a\cdot\int_C f\,ds$, for alle $a\in\mathbb{R}$

Bevis: f.eks (i)

$$\int_C (f+g)\,ds = \int_a^b \underbrace{(f+g)(r(t))}\cdot v(t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(r(t))\cdot v(t)\,dt + \int_a^b g(r(t))\cdot v(t)\,dt.$$

$v(t) = |r'(t)|$.

$$\int_a^b \big(f(r(t)) + g(r(t))\big)\cdot v(t) =$$

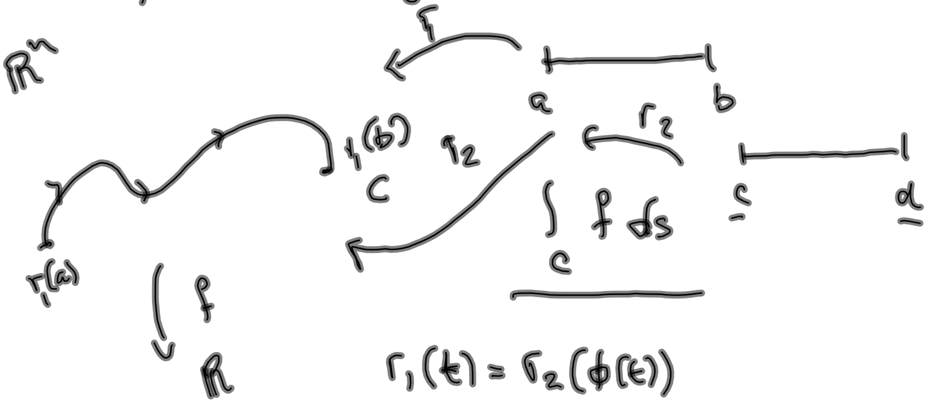
$$= \int_C f\,ds + \int_C g\,ds.$$

$\blacksquare$

Setning 3.3.3. Anta at r er en stykkevis glatt parametrisering av en kurve C og f er en kontinuerlig funksjon s.a. $\int_C f\,ds$ eksisterer.

Dersom $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ er en partisjon av $[a,b]$ og C_j er kurven parametrisert av $r: [t_{j-1}, t_j]$ for $j = 1, \dots, N$, så er

Ulike parametriseringer:



$r_1(t) = r_2(\phi(t))$

der $\phi : [a,b] \to [a,b]$ er voksende.

ϕ glatt,

$\phi'(t) \neq 0$ for alle t.

<u>DEF 3.3.4</u> Anta at $r_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ og $r_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ er to parametriseringer av den samme kurven C. Vi sier at r_1 og r_2 er <u>ekvivalente</u> dersom det fins $\phi : [a,b] \to [c,d]$ s.a.

(i) $r_1(t) = r_2(\phi(t))$, $t \in [a,b]$,

(ii) ϕ er kontinuerlig med v.m. $[c,d]$,

(iii) ϕ' er kontinuerlig på (a,b) og $\phi'(t) \neq 0$ for alle $t \in (a,b)$,

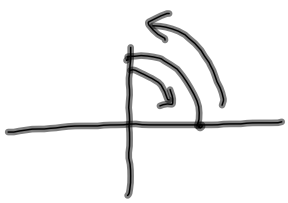
Dersom $\phi' > 0$ på (a,b) sier vi at r_1 og r_2 har samme orientering. Ellers sier vi at de har motsatt orientering.

$\phi : [a,b] \to [c,d]$

$r_1(t) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} t\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right)\right)$ $\quad t \in [0,1]$

$r_2(t) = \left(t, \sqrt{1-t^2}\right)$

$t \in [0,1]$



Minner om skifte-av-variabel-formel i en variabel.

$$[a,b] \xrightarrow{\phi} [c,d] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

ϕ er kont,
+ deriverbar på (a,b),
$\phi' > 0$,

$$(*) \qquad \int_c^d f(t)\,dt = \int_a^b f(\phi(t))\cdot\phi'(t)\,dt.$$

Setning 3.3.5: Anta at $r_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ og $r_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ er to ekvivalente parametriseringer av en kurve C. Anta også at f er kontinuerlig s.a. $\int_C f\,ds$ eksisterer. Da er $\int_C f\,ds$ uavhengig av valg av parametrisering.

Bevis: Anta at r_1 og r_2 har samme orientering, dvs. $\phi' > 0$.

$$\int_a^b f(r_1(t))\cdot v_1(t)\,dt = \int_a^b f(r_2(\phi(t)))\cdot(r_2(\phi(t)))'\,dt$$

$$\underset{\text{kjerneregel}}{=} \int_a^b f(r_2(\phi(t)))\cdot r_2'(\phi(t))\cdot\phi'(t)\,dt$$

$$\underset{(*)}{=} \int_c^d f(r_2(t))\cdot v_2(t)\,dt.$$