UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra - Prøveeksamen

Eksamensdag: Lørdag 8. juni 2013.

Tid for eksamen: 14.30 – 18.30

Oppgavesettet er på 4 sider.

Vedlegg: Formelsamling.

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver (1a, 1b, 2a, 2b, 3 osv.) teller 10 poeng. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1 La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Avgjør om A er inverterbar.

b) La $\mathbf{b} = (1, 2, \mathrm{a})$ for $a \in \mathbb{R}$. Avgjør for hvilke(n) verdi(er) av a ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en løsning, og finn alle løsninger.

Løsningsforslag: a) Vi regner ut determinanten med ekspansjon langs første rad:

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0.$$

En $(n \times n)$-matrise er invertibel hvis og bare hvis determinanten er forskjellig fra null, så vi ser at A *ikke* er invertibel.

b) Den utvidete matrisen til ligningssystemet er

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

og når vi radreduserer denne får vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

(Fortsettes på side 2.)

Vi ser at a må være 0 dersom vi skal ha en løsning, og i så fall har vi uendelig mange løsninger $z = 2y - 1$ og $x = 1 - y$ og $y \in \mathbb{R}$.

Oppgave 2 La B være matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3/2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene for matrisen B.

b) La $\mathbf{w} = (2, -2, 1)$. Finn $\lim_{n\to\infty} B^n \mathbf{w}$.

Løsningsforslag: a) Finner egenverdiene først, dvs., vi regner ut determinanten

$$\det(\lambda I - B) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 3/2 & 3/2 & \lambda - 1/2 \end{vmatrix}$$

Dersom vi utvikler langs tredje kolonne ser vi med en gang at $\det(\lambda I - B) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda - 1/2)$, slik at egenverdiene er $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1/2$. Videre finner vi de tilhørende egenvektorene: λ_1 : Ser at vi må ha $y = 2y$, så $y = 0$. Vi har også $-3/2x + 1/2z = 2z$ som gir $x = -z$, så vi kan sette $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1)$. λ_2 : Vi får $2x + y = y$, som gir $y = -x$. Så får vi $-3/2x + 3/2x + 1/2z = z$ som gir $z = 0$. Så vi kan sette $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 0)$. λ_3 : Det er lett å se at $B((0, 0, 1)) = (0, 0, 1/2)$, dvs., vi kan sette $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$.

b) Vi ser at $\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$. Vi får da at $B^n(\mathbf{w}) = B^n(2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \lambda_2^n \cdot 2\mathbf{v}_2 + \lambda_3^n \cdot \mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_2 + (1/2)^n \cdot \mathbf{v}_3$, så $\lim_{n\to\infty} B^n(\mathbf{w}) = 2\mathbf{v}_2$.

Oppgave 3 Vi betrakter potensrekken $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)x^{n-1}$.

a) Finn konvergensområdet til rekken.

b) Summer rekken.

Løsningsforslag:

a) Vi bruker forholdstesten: $\lim_{n\to\infty} \frac{n|x|^n}{(n-1)|x|^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1}|x| = |x|$, så rekka konvergerer for $|x| < 1$ og divergerer for $|x| > 1$. Videre ser vi at følgen $(n-1)x^{n-1}$ ikke er begrenset for $x = 1$ eller $x = -1$, så rekka divergerer i endepunktene.

b) Vi begynner med å skrive $f(x) = x \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)x^{n-2} = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$. Setter vi $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, ser vi at $f(x) = x \cdot f'(x)$. Så $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$

Oppgave 4

La $L \subset \mathbb{R}^3$ være det affine planet

$$L = \{(x, y, z) : x + 2y + 3z = 1\},$$

Finn punktet eller punktene på L som ligger nærmest origo.

(Fortsettes på side 3.)

Løsningsforslag: Vi bruker Lagrange, og vi ønsker da å minimere funksjonen $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ under bibetingelsen $g(x,y,z) = x + 2y + 3z = 1$. Vi må løse

$$(2x, 2y, 2z) = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda).$$

Dette gir $x = \lambda/2, y = \lambda, z = 3/2\lambda$. Bruker vi bibetingelsen får vi at $\lambda/2 + 2\lambda + 9/2\lambda = 1$, så $\lambda = 1/7$. Dette gir $x = 1/14, y = 1/7, z = 3/14$.

Oppgave 5 La $A \subset \mathbb{R}^2$ være området i $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$ som er avgrenset av koordinataksene og sirkelen $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Finn

$$\int\int_A x^2 y dx dy$$

Løsningsforslag: Vi bruker polarkoordinater og får

$$\int\int_A x^2 y dx dy = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} r^4 \cos^2(t) sin(t) dr dt = \frac{1}{15}[-cos^3(t)]_0^{\pi/2} = \frac{1}{15}.$$

Oppgave 6 La $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være avbildingen $F(x,y) = (1 + 2x + y + 5x^2 y, 3y + x + x^3)$. Vis at det fins en åpen mengde U om $(0,0)$, en åpen mengde V om $(1,0)$, og en deriverbar avbilding $G : V \to U$ slik at $G(F(x,y)) = (x,y)$. Finn $G'(1,0)$.

Løsningsforslag: Vi har at $F(0,0) = (1,0)$ og

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + 10xy & 1 + 5x^2 \\ 1 + 3x^2 & 3 \end{pmatrix}$$

, slik at

$$A := F'(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Siden $det(A) = 5 \neq 0$ følger eksistensen av U og V som påstått fra det inverse funksjonsteorem. Det følger også fra det inverse funksjonsteorem at $G'(1,0) = A^{-1}$. Regn ut A^{-1}!!

Oppgave 7

La $\mathbf{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ være vektorfeltet

$$\mathbf{F}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = (\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}), \mathrm{Q}(\mathrm{x},\mathrm{y})) = (\mathrm{x}\log(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2), \mathrm{y}\log(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2)),$$

definert for $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$, og la C være den lukkete kurven parametrisert ved $\mathbf{r}(\mathrm{t}) = (2\cos(\mathrm{t}), 3\sin(\mathrm{t})), \mathrm{t} \in [0, 2\pi]$. Vis at $\partial Q/\partial x(x,y) = \partial P/\partial y(x,y)$ for alle $(x,y) \neq (0,0)$, og finn

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Løsningsforslag: Vi har at $\partial Q/\partial x(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} = \partial P/\partial y(x,y)$. Lar vi nå $\tilde{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ kan vi la Ω betegne det begrensete området avgrenset av C og $\tilde{C}$. Det følger fra Green's Teorem at

$$\int\int_\Omega (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})(x,y) dx dy = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} - \int_{\tilde{\mathrm{C}}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

(Fortsettes på side 4.)

Ettersom $(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})(x, y) = 0$ får vi at

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\tilde{\mathrm{C}}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Men $\mathbf{F}$ er konstant lik null på $\tilde{C}$, så

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0.$$

SLUTT