UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra - Prøveeksamen
Eksamensdag:	Lørdag 8. juni 2013.
Tid for eksamen:	–
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver (1a, 1b, 2a, 2b, 3 osv.) teller 10 poeng. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1 La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Avgjør om A er inverterbar.

b) La $\mathbf{b} = (1, 2, \mathrm{a})$ for $a \in \mathbb{R}$. Avgjør for hvilke(n) verdi(er) av a ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en løsning, og finn alle løsninger.

Oppgave 2 La B være matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3/2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene for matrisen B.

b) La $\mathbf{w} = (2, -2, 1)$. Finn $\lim_{n\to\infty} A^n\mathbf{w}$.

Oppgave 3 Vi betrakter potensrekken $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)x^{n-1}$.

a) Finn konvergensområdet til rekken.

b) Summer rekken.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4
La $L \subset \mathbb{R}^3$ være det affine planet

$$L = \{(x, y, z) : x + 2y + 3z = 1\},$$

Finn punktet eller punktene på L som ligger nærmest origo.

Oppgave 5 La $A \subset \mathbb{R}^2$ være området i $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$ som er avgrenset av koordinataksene og sirkelen $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Finn

$$\int\int_A x^2 y dx dy$$

Oppgave 6 La $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være avbildingen $F(x, y) = (1 + 2x + y + 5x^2y, 3y + x + x^3)$. Vis at det fins en åpen mengde U om $(0, 0)$, en åpen mengde V om $(1, 0)$, og en deriverbar avbilding $G : V \to U$ slik at $G(F(x, y)) = (x, y)$. Finn $G'(1, 0)$.

Oppgave 7

La $\mathbf{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ være vektorfeltet

$$\mathbf{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = (\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \mathrm{Q}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) = (\mathrm{x} \log(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2), \mathrm{y} \log(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2)),$$

definert for $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, og la C være den lukkete kurven parametrisert ved $\mathbf{r}(\mathrm{t}) = (2\cos(\mathrm{t}), 3\sin(\mathrm{t})), \mathrm{t} \in [0, 2\pi]$. Vis at $\partial Q/\partial x(x, y) = \partial P/\partial y(x, y)$ for alle $(x, y) \neq (0, 0)$, og finn

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

SLUTT