12.6: Konvergens av potensrekker

• **Potensrekke:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \cdots$$

Eks:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!}}_{a_n} (x-\underbrace{1}_{a})^n = 1 + (x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \cdots$$

Konvergensområder for potensrekker

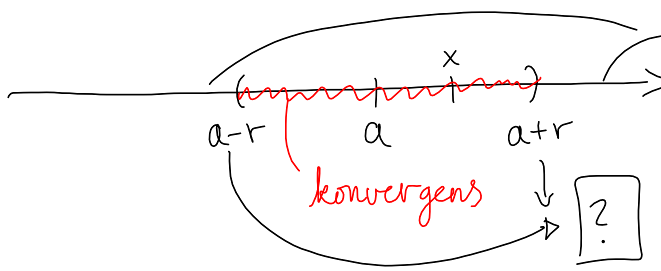
Teorem: La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ være en potensrekke. Da er det 3 muligheter:

i) Potensrekka konvergerer for alle x.

ii) Potensrekka konvergerer bare $x = a$.

iii) Det fins et tall r s.a. potensrekka konvergerer absolutt for alle x s.a. $|x-a| < r$ og divergerer for x s.a. $|x-a| > r$.

r kalles **konvergensradien** til potensrekka.



Hva skjer i endepkt'ene?
Alt kan skje!

Finne konvergensområder i praksis

Eks: Finn konvergensområdet til $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}_{a_n} \underbrace{x}_{(x-0)}{}^{n}$

a

Rottesten:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n |x|$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Def. e

$$= \underline{|x| e}$$

Fra rottesten

$|x|e < 1 \iff |x| < \frac{1}{e}$, så vi har konvergens for $|x| < \frac{1}{e}$ og divergens for $|x| > \frac{1}{e}$.

Må se på $|x| = \frac{1}{e}$, dvs. $x = \frac{1}{e}$ eller $x = -\frac{1}{e}$ for seg:

i) $x = \frac{1}{e}$: $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n}$

Går leddene mot 0?

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n}\right)}$$

TRIKS: $e^{\ln(\cdots)}$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right) + \ln\left(e^{-n}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{n^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)}$$

M: $\lim\limits_{n\to\infty} \underset{\downarrow\,\infty}{n^2} \left[\underset{\downarrow\,0}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - \underset{\downarrow\,0}{\frac{1}{n}} \right] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \begin{matrix}\to 0 \\ \to 0\end{matrix}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\left(-\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2}}{-2\frac{1}{n^3}}$$

"$\frac{0}{0}$": L'H

$$= -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n}{1+\frac{1}{n}} + n\right) = -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{-n}+\cancel{n}+1}{1+\frac{1}{n}}$$

$$= \underline{-\frac{1}{2}}$$

Så: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n} = e^{-\frac{1}{2}}$. Leddene i rekka går ikke mot 0 når $n\to\infty$, så rekka divergerer for $x=\frac{1}{e}$.

Tilfellet $x=-\frac{1}{e}$; helt tilsvarende!

Dvs: Konvergensintervallet er $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

Abels teorem: Summen $S(x)$ til en potensrekke $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ er kontinuerlig i hele konvergensområdet.

Kjente rekker: $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$

$a_n = 1$ for alle n og $a=0$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\underbrace{x^2}_{u})^n = \frac{1}{1-x^2}\right).$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n$$

$$\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n\,dx$$

$$= \int\left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots\right)dx$$

?

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

12.7: Regning med potensrekker

Integrasjon og derivasjon

La: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$

Hvis endelig sum:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$$

$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$$

Trenger ikke å være sant!

Setning: Anta at potensrekka $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ har konvergensradius $r > 0$ ($r = \infty$ OK),

i) Da er $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$ i det indre av konvergensområdet, dvs. $(a-r, a+r)$.

Den deriverte rekka har samme konv. radius som den oppr. rekka, men kan miste konv. i endeplt.

ii) Da er $\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$ i hele konv. området

Den integrerte rekka har samme konvergensradius som den oppr. rekka, men vi kan tjene konvergens i endeplt'ene.

Eks: Vet: For $|x|<1$,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n x^{2n}}_{(-x^2)^n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

geometrisk rekke!

Integrerer:
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}\,dx$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad |x|<1$$
$$-1 < x < 1$$

MERK: $x=1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$; alternerende rekke med avtagende ledd som $\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ Rekka konvergerer!

12.3.1

Fra Abels teorem vil likheten holde for $x=1$:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Leibniz formel

Multiplikasjon av rekker

- To potensrekker: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$
- Forsøk: Gang sammen som endelige polynomer!

$$a_0 b_0 + a_0 b_1 x + a_0 b_2 x^2 + a_0 b_3 x^3 + \dots$$
$$+ a_1 b_0 x + a_1 b_1 x^2 + a_1 b_2 x^3 + a_1 b_3 x^4 + \dots$$
$$+ a_2 b_0 x^2 + a_2 b_1 x^3 + a_2 b_2 x^4 + \dots$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \dots$$

Produktrekka: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ der
$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

Setning: La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ være to potensrekker og la r være den minste konvergensradien. Da konverer rekka $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ der

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

for alle $x \in (a-r, a+r)$ og for slike x er

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n\right)$$

Eks: Skriv $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2$ som rekke.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right),$$ så $a=0$ og $b_n = a_n = 1$ for alle n.

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$
$$= 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + \dots + 1\cdot 1 + 1\cdot 1$$
$$= n+1$$

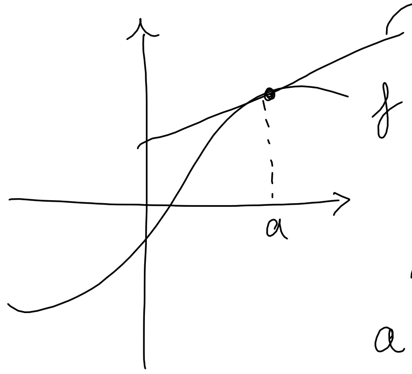
Så: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \quad (\star)$

$|x|<1$ Setning

Husk: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, så fra $(\star)$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

12.8: Taylorrekker



Tangenten til f i a:
Stigning $f'(a)$

Tangenten i a er den rette linja som best tilnærmer f i nærheten av a.

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Kaller: $\underbrace{T_1 f(x)}_{\text{Førstegrads}} = f(a) + f'(a)(x-a)$

Førstegrads Taylorpolynom; altså førstegradspolynomet som best tilnærmer f rundt a. (i nærheten av)

- Taylorpolynomet av n'te grad: Det n'te gradspolynomet som best tilnærmer f nære a.

$$T_n f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Taylors formel:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{Restleddet}}$$

der c er et punkt mellom x og a.

Def: Taylorrekka til funksjonen f i punktet a er

$$Tf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

- Hvis restleddet i Taylors formel går mot 0 når $n \to \infty$, så er

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{\text{en potensrekke!}}$$

Taylorrekka til f