Plenum 20/5

5.7: 2, 3, 9

5.8: 3

5.9: 10

5.7: Omvendte og implisitte funksjoner

2) $\vec{F}(x,y) = \begin{bmatrix} e^{x+y^2-1} \\ x-y \end{bmatrix}$

Jacobimatrise: $\vec{F}'(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} e^{x+y^2-1} & 2y e^{x+y^2-1} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\vec{F}'(0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\det(\vec{F}'(0,1)) = -1-2 = -3 \neq 0$,

så $\vec{F}'(0,1)$ er inverterbar. Fra omvendt funksjonsteorem fins det derfor en omvendt funk. $\vec{G}$ til $\vec{F}$ i en omegn om $\vec{F}(0,1) = (1,-1)$ s.a.

$$\underline{(0,1)} = \vec{G}(\vec{F}(0,1)) = \underline{\vec{G}(1,-1)}$$

$\vec{G}$ omvendt av $\vec{F}$

Dessuten: $\vec{G}'(1,-1) = \vec{F}'(0,1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$

omvendt funk. thm.

M: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Så: $\vec{G}'(1,-1) = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Tilsv:

$\vec{F}'(-3,-2) = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\det(\vec{F}'(-3,-2)) = -1+4 = 3 \neq 0$,

så $\vec{F}'(-3,-2)$ er inverterbar. Fra omvendt funk. teorem har $\vec{F}$ en omvendt funk. $\vec{H}$ i en omegn om $\vec{F}(-3,-2) = (1,-1)$ s.a.

$(-3,-2) = \vec{H}'(\vec{F}(-3,-2)) = \underline{\vec{H}(1,-1)}$

$\vec{H}$ omv. av $\vec{F}$

Dessuten:

$$\vec{H}'(1,-1) \underset{\substack{\text{omv.}\\ \text{funk. teorem.}}}{=} \vec{F}'(-3,-2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

M: $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Så:

$$\vec{H}'(1,-1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Kurve: $x^3 + y^3 + y = 1$

La $g(x,y) = x^3 + y^3 + y - 1$. For (x_0, y_0) på kurven, er $g(x_0,y_0) = 0$, og $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = 3y_0^2 + 1 \neq 0$. Da gir implisitt funksjonsteorem at det fins en funksjon $f(x)$ s.a. $f(x_0) = y_0$ og $g(x, f(x)) = 0$, dvs.

$$x^3 + f(x)^3 + f(x) - 1 = 0,$$ så ligningen for kurven er tilfredsstilt. Da er:

$$f'(x_0) \underset{\substack{\text{implisitt}\\ \text{funk.teorem}}}{=} -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)} = -\frac{3x_0^2}{3y_0^2+1}.$$

9.) $\phi(x, y(x)) = C,$

La x være s.a. $\phi(x, y(x))$ er definert og la

$$f(x, y(x)) := \phi(x, y(x)) - C \underset{\boxed{\text{antagelse}}}{=} 0$$

La x_0 være et pkt. s.a. $\phi(x_0, y(x_0))$ er def.

Siden $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y(x_0)) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x_0, y(x_0)) \underset{\boxed{\text{antagelse}}}{\neq} 0$

og siden de partiellderiverte til ϕ, og dermed f, er kont., så gir implisitt funksjonsteorem at det fins en funk. g s.a. $g(x_0) = y(x_0)$ og

$$f(x_0, g(x_0)) = 0, \text{ dvs. } \phi(x_0, g(x_0)) = C$$

I tillegg er:

$$g'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y(x_0))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y(x_0))} = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0, y(x_0))}{\frac{\partial \phi}{\partial y}(x_0, y(x_0))}$$

Men, siden dette holder for alle x_0 i def. området, må funksjonene g og y være like (samme funksjon), så

$$y'(x) = g'(x) = \frac{-\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y(x))}$$

5.8: Ekstremalverdisetningen

3) a) $f(\vec{x}) = |\underbrace{\vec{x}}_{\text{kont.}} - \underbrace{\vec{F}(\vec{x})}_{\text{kont.}}| \rightarrow$ kont.

Kontinuerlig: f er kont. fordi den er en sammensetning av kont. funk.

Min.pkt: f er kont. og A er lukket og mengde, så fra ekstremalverdisetningen så har f minimumspkt.

b) Anta: $|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| < |\vec{x} - \vec{y}|$ for alle $\vec{x} \neq \vec{y}$

VIS: $\vec{F}$ har entydig fikspkt.

Bevis: 1) $\vec{F}$ har maks ett fikspkt: Anta at $\vec{x}$ og $\vec{y}$ er fikspkt.'er. Da er:

$$|\vec{x} - \vec{y}| \underset{\text{def. fikspkt.}}{=} |\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| \underset{\text{antagelse for } \vec{x} \neq \vec{y}}{<} |\vec{x} - \vec{y}| \text{; usant!}$$

Men dvs. $\vec{x} = \vec{y}$, og dermed fins det maksimalt ett fikspunkt for $\vec{F}$.

2) Fins fikspkt: La $\vec{x}_0$ være minimumspkt. til $f(\vec{x}) = |\vec{x} - \vec{F}(\vec{x})|$

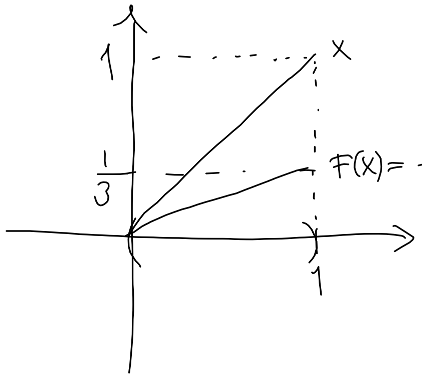
Da er

$$f(\vec{F}(\vec{x}_0)) \underset{\text{def. } f}{=} |\vec{F}(\vec{x}_0) - \vec{F}(\vec{F}(\vec{x}_0))| \underset{\text{antagelse: for } \vec{x}_0 \neq \vec{F}(\vec{x}_0)}{<} |\vec{x}_0 - \vec{F}(\vec{x}_0)| = f(\vec{x}_0)$$

men dvs. at $f(\vec{F}(\vec{x}_0))$ er mindre enn minimumet $f(\vec{x}_0)$; motsigelse! Eneste måte utenom dette er at $\vec{F}(\vec{x}_0) = \vec{x}_0 \Rightarrow \vec{x}_0$ er et fikspunkt for $\vec{F}$.

1) og 2) $\Rightarrow$ $\vec{F}$ har et entydig fikspkt. $\boxtimes$

c) La $F(x) = \frac{x}{3}$ på $A = (0,1) \to$ åpen



$F(x) = x$

$F(x) = \frac{x}{3}$; $|F(x) - F(y)| = \frac{|x-y|}{3} < |x-y|$ ($x \neq y$)

F har ikke noe fikspkt. i A
(fikspkt. er $\underline{\underline{0 \notin A}}$).

skjæringen m/ x

5.9: Maks- og minimumspkt

10) $f(x,y) = (x^2 - y^2)\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

a)
$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2x - x^3 + xy^2)\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \\ (-2y - x^2 y + y^3)\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dvs: $2x - x^3 + xy^2 = 0$
$-2y - x^2 y + y^3 = 0$

3 muligheter:

i) $\underline{x=0}$: $-2y + y^3 = 0$

Så: $\underline{y=0}$ eller $y^3 = 2y$

$y^2 = 2 \longrightarrow (y \neq 0)$

$\underline{y = \pm\sqrt{2}}$

ii) $\underline{y=0}$: $2x - x^3 = 0$

$2x = x^3$

$\underline{x=0}$ eller $x^2 = 2$

$\underline{x = \pm\sqrt{2}}$

iii) $\underline{x \neq 0 \text{ og } y \neq 0}$: $2 - x^2 + y^2 = 0$

$-2 - x^2 + y^2 = 0$

$\Updownarrow$

$x^2 - y^2 = 2$

$-(x^2 - y^2) = 2$

Dette systemet har ingen løsning!

Stasjonære punkter: $(0,0)$, $(0,-\sqrt{2})$, $(0,\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},0)$ og $(-\sqrt{2},0)$.

Hesse matrise:

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2-5x^2+y^2+x^4-x^2y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} & (x^3y-xy^3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \\ (x^3y-xy^3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} & (-2-x^2+5y^2+x^2y^2-y^4)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \end{bmatrix}$$

Setter inn stasj. pkt:

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad Hf(0,\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} 4e^{-1} & 0 \\ 0 & 4e^{-1} \end{bmatrix}$$

$$Hf(0,-\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} 4e^{-1} & 0 \\ 0 & 4e^{-1} \end{bmatrix}, \quad Hf(\sqrt{2},0) = \begin{bmatrix} -4e^{-1} & 0 \\ 0 & -4e^{-1} \end{bmatrix}$$

$$Hf(-\sqrt{2},0) = \begin{bmatrix} -4e^{-1} & 0 \\ 0 & -4e^{-1} \end{bmatrix}$$

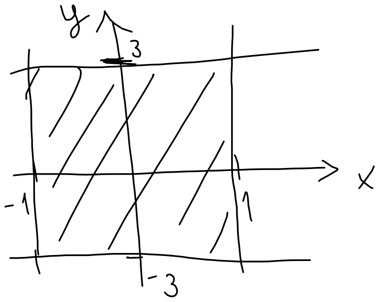
Alle matrisene er diagonalmatriser (spes. f. eks. nedre triangulære), så egenverdiene er diagonalelementene. Fra annenderivertesten:

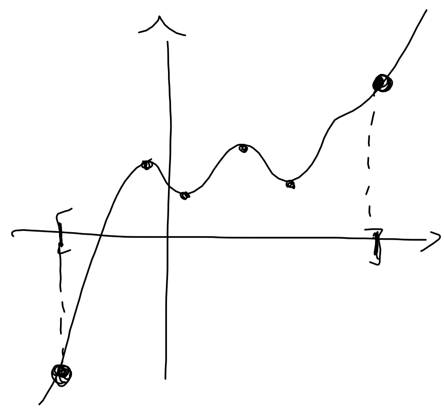
- $(0,0)$ er sadelpkt, siden den tilh. Hessematrisen har både pos. og neg. egenverdier. $f(0,0) = 0$

- $(0, \sqrt{2})$ og $(0, -\sqrt{2})$ er minimumspkt. siden egenverdiene er pos. $f(0,\sqrt{2}) = f(0,-\sqrt{2}) = \underline{-2e^{-1}}$.

- $(\sqrt{2}, 0)$ og $(-\sqrt{2}, 0)$ er maksimumspkt. siden egenverdiene er negative. $f(\sqrt{2}, 0) = f(-\sqrt{2}, 0) = \underline{2e^{-1}}$.

b) $\{(x,y) \mid |x| \le 1,\ |y| \le 3\}$





Av plt. fra a) er kun $(0,0)$, $(0,\sqrt{2})$ og $(0,-\sqrt{2})$ innenfor området. I tillegg til disse kan vi ha kandidater til max- og min. plt. på randen av området.

i) <u>Hvis $|x| = 1$</u> : $f(x,y) = (x^2 - y^2)\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

$$= (1 - y^2)\, e^{-\frac{1+y^2}{2}} := g(y)$$

$$g'(y) = (1-y^2)\, e^{-\frac{1+y^2}{2}}(-y) + (-2y)\, e^{-\frac{1+y^2}{2}}$$

$$= (-3y + y^3)\, e^{-\frac{1+y^2}{2}} = 0$$

$$3y = y^3$$

$\underline{y = 0}$ eller $y^2 = 3$

$$\underline{y = \pm\sqrt{3}}$$

Kandidater for maks og min:

- $(\pm 1, 0)$; $f(\pm 1, 0) = e^{-\frac{1}{2}}$
- $(\pm 1, \pm\sqrt{3})$; $f(\pm 1, \pm\sqrt{3}) = -2e^{-2}$
- $(\pm 1, \mp\sqrt{3})$; $f(\pm 1, \mp\sqrt{3}) = -2e^{-2}$

ii) $|y| = 3$: $f(x, y) = (x^2 - 9)e^{-\frac{x^2+9}{2}} := h(x)$

$$h'(x) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{eller} \quad x = \pm\sqrt{11}$$

Kandidater: $(0, \pm 3)$; $f(0, \pm 3) = -9e^{-\frac{9}{2}}$

iii) $|x| = 1$ og $|y| = 3$ (hjørnene).