Plenum 23/4-15

4.5: 8, 9

4.6: 6, 10a, 11, 12

Tirsdag 28/4-15; Panikkhjelp Oblig 2, RF kjeller 16.00

4.5: Inverse matriser

8) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; inv. bar, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$; inv. bar.

$$C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{31} & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & b_{11} & \cdots & \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & & 0 & & & b_{mm} \end{bmatrix}$$

VIS: C inv. bar & $C^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}}_{\text{Kall denne } \overline{C}\text{!}}$

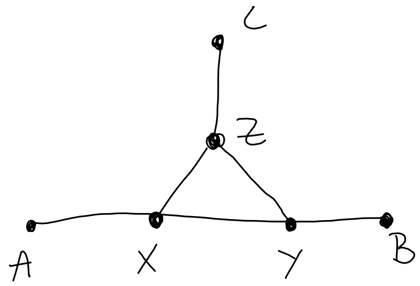
Bevis: Nok å vise at $C\overline{C} = I_{n+m}$ (Setning 4.5.3).

$$C\overline{C} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^{-1} + 00 & A0 + 0B^{-1} \\ 0A^{-1} + B0 & 00 + BB^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = I_{n+m}, \text{ så } \overline{C} = C^{-1}!$$

$\blacksquare$

9) El-nettverk:



Indre pkt: X, Y, Z

Naboer X: A, Y, Z

Naboer Y: X, B, Z

Naboer Z: X, Y, C ; a, b, c, x, y, z ; spenningen i resp. pkt.

$$x = \frac{a+z+y}{3}, \quad y = \frac{x+b+z}{3}$$

$$z = \frac{x+y+c}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} 3x - y - z &= a \\ -x + 3y - z &= b \\ -x - y + 3z &= c \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \; ; \; A\vec{x} = \vec{b} \text{ (som i oppg.)}$$

b)

$$\left[\begin{array}{cccccc} 3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}}$$

c) $\vec{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$
$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$
$$(A^{-1}A)\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$
$$I\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$
$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Hos oss: $\vec{x} = A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ 2 \\ \frac{9}{4} \end{bmatrix}}}$

d) $A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

Må velge

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}}}$$

4.6: Linearkombinasjoner og basiser

11.) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

a) Ser at vektorene er lin. uavh. (pga. motsatt fortegn på siste komponent, men ikke på første), så dermed er de en basis for $\mathbb{R}^2$.

b) $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dvs: Finn x, y, z, w s.a.

$$x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 = \vec{e}_1 \quad \text{og} \quad z\vec{v}_1 + w\vec{v}_2 = \vec{e}_2$$

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \vec{e}_1 \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \vec{e}_2$$

$$\begin{array}{cccc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Så: $\vec{e}_1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_2}}$, $\vec{e}_2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}\vec{v}_1 - \frac{1}{2}\vec{v}_2}}$

c) $\vec{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{T}(\vec{v}_1) = 2\vec{v}_1$ og $\vec{T}(\vec{v}_2) = -\vec{v}_2$.

Dette følger rett fra Set. 4.6.13 og at $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ er en basis for $\mathbb{R}^2$.

d) VET: Kolonnene i A er $\vec{T}(\vec{e}_1)$ og $\vec{T}(\vec{e}_2)$

$$\vec{T}(\vec{e}_1) \underset{\text{b)}}{=} \vec{T}\left(\frac{1}{2}\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_2\right) \underset{\vec{T}\text{ lineær}}{=} \frac{1}{2}\vec{T}(\vec{v}_1) + \frac{1}{2}\vec{T}(\vec{v}_2)$$

$$= \frac{1}{2}2\vec{v}_1 - \frac{1}{2}\vec{v}_2 = \vec{v}_1 - \frac{1}{2}\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{T}(\vec{e}_2) \underset{\text{b)}}{=} \vec{T}\left(\frac{1}{2}\vec{v}_1 - \frac{1}{2}\vec{v}_2\right) \underset{\vec{T}\text{ lineær}}{=} \frac{1}{2}\vec{T}(\vec{v}_1) - \frac{1}{2}\vec{T}(\vec{v}_2)$$

$$= \frac{1}{2}2\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Så: $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

12) $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$, ikke-null, normale.

VIS: $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ er lin. uavh.

Bevis: Bruker Set. 4.6.5: Vektorer $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ er lin. uavh. $\Leftrightarrow$ følgende:

- En lin. komb.
  $$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_k\vec{v}_k = 0$$
  $$\Updownarrow$$
- $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$.

Anta at $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_k\vec{v}_k = 0$. Da er for $i = 1, \dots, k$:

$$0 = (c_1\vec{v}_1 + \dots + c_k\vec{v}_k)\cdot\vec{v}_i$$

$$= c_1(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_i) + \dots + c_k(\vec{v}_k\cdot\vec{v}_i)$$

Vektorene er normale

$$= c_i(\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i) = c_i\,|\vec{v}_i|^2$$

$$\Downarrow \quad (\vec{v}_i \text{ ikke-null for alle } i)$$

$$c_i = 0$$

Så $c_i = 0$ for $i = 1, \dots, k$. Men, dvs. fra Set. 4.6.5, så er $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ lin. uavh.

6.) Vi vil sjekke om enhver $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$ kan skrives som:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$+ x_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Dvs: Har dette lineære ligningssys. løsning for alle $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & -7 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 10 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$4 \times \cancel{5} \cdot \cancel{5} \times 1 = 4 \times 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & -7 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 10 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rref(...)

$\boxed{\text{MATLAB!}}$

Siden vi har 4 pivotelementer og er i $\mathbb{R}^4$ har ligningssystemet en løsning for alle $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$. Dvs. alle $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$ kan skrives som en lin. komb. av de 5 vektorene.

10) a) $\underbrace{\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\\3\end{bmatrix}}$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\\-1 & 3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 0\\0 & 5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 5\\0 & 0\end{bmatrix}$$

Utvider denne til en diagonalmatrise:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 5 & 0\end{bmatrix}$$

Bytt siste & midtre rad

$$\sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 4 & 1\\-1 & 3 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.

Ta +2 rad 1 på rad 2 & Ta −1· rad 1 på rad 3