UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitskaplege fakultet

Eksamen i:	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra.
Eksamensdag:	Onsdag 10. juni 2015.
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00.
Oppgåvesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatne hjelpemiddel:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgåvesettet er komplett før
du tek til å svare på spørsmåla.

Alle deloppgåver (Oppgåve 1a, 1b, 2, 3a, 3b osb.) tel 10 poeng.

Oppgåve 1. I denne oppgåva er $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funksjonen

$$f(x, y) = 2x^2y + 2xy + y^2$$

a) (10 poeng) Finn dei stasjonære punkta til f.

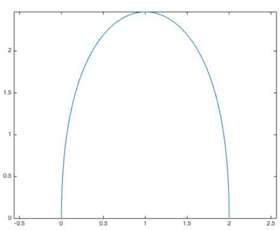
b) (10 poeng) Avgjer om dei stasjonære punkta er salpunkt, lokale minimumspunkt eller lokale maksimumspunkt.

Oppgåve 2. (10 poeng) Finn konvergensområdet til rekkja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n2^n}$$

Oppgåve 3. Figuren viser eit MATLAB-plot av ei kurve $\mathcal{C}$ med parametrisering

$$\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t)\,\mathbf{i} + t(\pi - t)\,\mathbf{j}\,, \quad \text{der } t \in [0, \pi]$$



a) (10 poeng) Forklår at arealet A til området mellom kurva og x-aksen er gjeve ved

$$A = \int_{\mathcal{C}} x\,dy + \int_{\mathcal{D}} x\,dy$$

der $\mathcal{D}$ er linjestykket frå $(0, 0)$ til $(2, 0)$.

b) (10 poeng) Rekn ut A.

(Framhald på side 2.)

Oppgåve 4. I denne oppgåvå er V volumet til området avgrensa av dei to paraboloidane

$$z = x^2 + 2x + y^2 - 4y$$
$$z = 6 - x^2 - 2x - y^2 - 4y$$

a) (10 poeng) Forklår at

$$V = 2\iint_D (3 - x^2 - y^2 - 2x)\, dxdy$$

der D er eit område i xy-planet. Kva for eit område er D?

b) (10 poeng) Rekn ut V.

Oppgåve 5. I denne oppgåva kan du utan prov nytte følgjande konsekvens av spektralteoremet: Dersom $\mathbf{v}_1$ er ein eigenvektor til ei symmetrisk $n \times n$-matrise A, så finst det ein ortogonal basis av eigenvektorar $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ til A som inneheld $\mathbf{v}_1$ (ein basis er *ortogonal* dersom vektorane står normalt på kvarandre).

I heile oppgåva er A_n den $n \times n$-matrisa der alle elementa er 1, dvs.

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

a) (10 poeng) Vis at

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

er ein eigenvektor til A_n. Kva er eigenverdien? Vis også at alle ikkje-null vektorar som står normalt på $\mathbf{v}_1$, er eigenvektorar. Kor mange forskjellige eigenverdiar har A_n, og kva for multiplisitet har dei?

b) (10 poeng) Finn ein ortogonal basis av eigenvektorar til A_3.

c) (10 poeng) For kvart reelt tal a er $A_n(a)$ matrisa

$$A_n(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & a \end{pmatrix} = (a-1)I_n + A_n$$

Vis at eigenvektorane til A_n også er eigenvektorar til $A_n(a)$. Kva er eigenverdiane til $A_n(a)$, og kva for multiplisitet har dei?

SLUTT