

21. april, 2016

MAT1110: Obligatorisk oppgave 2

Innleveringsfrist: 12/5-2016, kl. 14:30

Informasjon

Den skriftlige besvarelsen skal leveres i obligkassa som står i gangen utenfor ekspedisjonen i 7. et. i Niels Henrik Abels hus senest *kl. 14.30 torsdag 12/5*. Oppgaven skal leveres med en offisiell forside som du finner her:

<https://www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-obligforside.pdf>.

Besvarelsen *skal* være skrevet av deg selv, for hånd eller på datamaskin.

Studenter som blir syke eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse for denne obligatoriske oppgaven, må ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (7. et. Niels Henrik Abels hus, telefon 22 8558 88, e-post: studieinfo@math.uio.no) i god tid før innleveringsfristen.

Det oppfordres til samarbeid underveis i arbeidet med oppgavene, og gruppelærer og forelesere har anledning til å svare på generelle spørsmål, men kan ikke servere ferdige løsninger. *Den endelige besvarelsen som du leverer skal utarbeides av deg selv, og du må kunne redegjøre for innholdet ved en eventuell muntlig høring (aktuelt ved mistanke om avskrift).*

Husk at begge de to obligatoriske oppgavene i MAT1110 må bestås for å kunne gå opp til endelig eksamen i kurset. *For å få bestått på denne obligatoriske oppgaven må minst 60 prosent av oppgavene være riktig besvart.* Alle 8 delspørsmål teller like mye. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har vist at de har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få en mulighet til å levere en revidert besvarelse.

Du kan selv velge om du vil programmere i Matlab eller Python.

1. Vi skal først se på en anvendelse av egenverdier og egenvektorer.

a. Et leiebilfirma leier ut biler i tre forskjellige byer A, B, og C. Vi antar at alle biler leies for en dag. Av de bilene som leies ut i by A returneres 40% til by A, 30% til by B, og 30% til by C. Av de bilene som leies ut i by B returneres 30% til by A, 50% til by B, og 20% til by C. Av de bilene som leies ut i by C returneres 30% til by A, 20% til by B, og 50% til by C. Finn en matrise A slik at, hvis det på en dag er x , y , og z utleiebiler i by A, B, og C, så vil vektoren

$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ angi antall leiebiler i de respektive byene dagen etter.

Hint: se starten av eksempel 4.11.2, hvis du vil se et annet eksempel på hvordan man setter opp en slik matrise.

b. Vis at $\lambda = 1$ er en egenverdi for A , og finn en tilhørende egenvektor.

c. Bruk kommandoen `eig` i Matlab, eller `linalg.eig` i numpy i Python, til å finne de andre egenverdiene. Fra det som returneres, gjet på tilhørende egenvektorer, og verifiser om de er egenvektorer ved å sjekke ved regning om Ax er lik λx .

d. Anta nå at det til å begynne med er 30 leiebiler i by A, 60 leiebiler i by B, og 30 leiebiler i by C. Skriv vektoren $(30, 60, 30)$ som en lineær kombinasjon av egenvektorene du har funnet, og finn et uttrykk for antall leiebiler i byene etter n dager. Hvordan vil bilene fordele seg når tiden går mot uendelig?

e. Plott antall biler i by A, B, og C i samme koordinatsystem. I plottet ditt skal x -aksen svare til antall dager.

Hint: Du kan evt. ta en titt på koden det er linket til fra forelesningen 12. april i timeplanen, hvis du vil se et eksempel på hvordan man kan lage et slikt plott.

2. Vi skal her bruke Newtons metode i flere variable (sek. 5.6) for å finne nullpunkter til funksjonen $F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2y - y^2 \\ x - 3 \end{pmatrix}$.

a. Finn nullpunktene til F ved regning.

b. Vi skal bruke startpunktet $x_0 = (1, 1)$ for Newtons metode i to variable. Finn Jacobimatrisen til F , og gjør de første to iterasjonene av Newtons metode for hånd. Du skal altså regne ut

$$x_1 = x_0 - F'(x_0)^{-1}F(x_0), \text{ og } x_2 = x_1 - F'(x_1)^{-1}F(x_1).$$

c. Kjør et program som regner ut første 10 iterasjoner av Newtons metode, der startpunktet er $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$. Konvergerer Newtons metode mot et nullpunkt, og hvilket? Hva skjer hvis du i stedet velger startpunktet $\mathbf{x}_0 = (1, 0.1)$?

Hint: Du kan godt ta utgangspunkt i funksjonen `newtonfler` som er lagt ut på kurssidene i Matlab- og Pythonversjon. `newtonfler` tar funksjonene (F) og Jacobimatrisen (J) som input, slik at metoden i prinsippet kan brukes på alle funksjoner. Hvis du ikke er komfortabel med funksjoner som inputparametre, så kan du i stedet lage din egen implementasjon for Newtons metode, som kun virker for funksjonen og Jacobimatrisen fra denne oppgaven.