30. mai 2017

MAT1110

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 23. FEBRUAR 2017, klokken 14:30 i obligkassen, som står i gangen utenfor ekspedisjonen i 7. etasje i Niels Henrik Abels hus.

Instruksjoner

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd eller på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Alle besvarelser skal inkludere følgende offisielle forside:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-obligforside.pdf

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du skrive ut programkoden og levere denne sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir. For å skrive ut programkoden fra en av UiOs Linux-maskiner kan du gå til mappen hvor programmet ditt ligger og skrive

```
lpr -P pullprint_produsent filnavn
```

der `filnavn` er navnet på filen du ønsker å skrive ut og `pullprint_produsent` er navnet på produsenten av skriveren du ønsker å hente utskriften fra. Det er vanlig å enten bruke `pullprint_Ricoh` eller `pullprint_HP`.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (7. etasje i Niels Henrik Abels hus, e-post: studieinfo@math.uio.no) i god tid før innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Oppgave 1. La T være en lineæavbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som er slik at

$$T\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

a) Finn en 2×2 matrise A slik at $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

Forslag til svar: Sett $A = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$. Da blir

$$2a + b = -2,\ 2c + d = 1,\ a + b = 1,\ c + d = 1,$$

som gir $c = 0$, $d = 1$, $a = -3$, $b = 4$. Altså

$$A = \begin{pmatrix}-3 & 4\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

b) Finn to egenverdier og to tilhørende egenvektorer for A.

Forslag til svar: Vi ser at $u = (1, 1)$ er en egenvektor med egenverdi $\lambda = 1$, og $\mu = -3$, vi kan finne egenvektorer ved å løse

$$\begin{pmatrix}-3 & 4\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}.$$

som gir eqenvektoren $v = (1, 0)$.

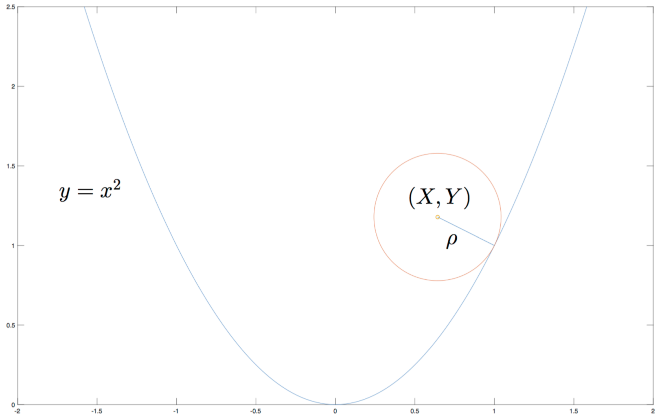
c) Regn ut

$$(A^5 + A^3 + A)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},$$

Forslag til svar: Vi har at $(2, 1) = u + v$, derfor har vi at

$$\begin{aligned}
(A^5 + A^3 + A)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} &= (A^5 + A^3 + A)(u + v)\\
&= (A^5 + A^3 + A)u + (A^5 + A^3 + A)v\\
&= (1^5 + 1^3 + 1)u + (-3^5 - 3^3 - 3)v\\
&= 3u - 3\frac{3^5 - 1}{2}v\\
&= 3u - 273v\\
&= \begin{pmatrix}-270\\3\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Oppgave 2. En disk med radius $\rho \le 1/2$ ruller på parabelen $y = x^2$. Se figur 1. La senteret i disken ha koordinater (X, Y).



Figur 1: En disk som ruller på en parabel.

a) Finn enhetsnormalen med negativ andrekomponent til kurven $\mathbf{s}(x) = (x, x^2)$. Nedenfor kaller vi denne for $\mathbf{n}(x)$.

Forslag til svar: $\mathbf{s}'(x) = (1, 2x)$ og $\mathbf{n}(x) = (2x, -1)/\sqrt{1+x^2}$.

b) Finn X og Y som funksjon av førstekomponten til berøringspunktet $\mathbf{s}(x)$

Forslag til svar: $(X, Y) - \rho\mathbf{n}(x) = \mathbf{s}(x)$, så

$$(X, Y) = \mathbf{s}(x) - \rho\mathbf{n}(x).$$

c) Anta at $x(t) = 2\cos(t)$. Finn hastigheten $\mathbf{v}(t)$ og akselerasjonen $\mathbf{a}(t)$ til senteret i disken.

Forslag til svar:

$$\mathbf{v}(x) = \frac{d}{dt}(X(2\cos(t)), Y(2\cos(t)))$$

Dette blir for komplisert, skal se om Maple kan finne et uttrykk...

Vi er nå interessert i å finne banen, $\mathbf{r}(x)$, til det punktet på randen av disken som er slik at $\mathbf{r}(0) = (0, 0)$. For å hjelpe oss med dette innfører vi funksjonen

$$\sigma(x) = \int_0^x \sqrt{1+4\xi^2}\, d\xi = \frac{1}{4}\left(2x\sqrt{1+4x^2} + \sinh^{-1}(2x)\right),$$

der $\sinh^{-1}$ betegner den inverse til *hyperbolsk sinus*.

d) Forklar hvorfor $\sigma(x)$ er buelengden på kurven $\mathbf{s}(t) = (t, t^2)$ for $t \in [0, x]$.

Forslag til svar: Dette er formelen for buelengde av en parametrisert kurve, side 162, defininsjon 3.1.5.

e) La $\mathbf{m}(x) = \mathbf{r}(x) - (X(x), Y(x))$. Forklar hvorfor

$$\mathbf{m}(x) = \rho \begin{pmatrix} \cos(\frac{\sigma(x)}{\rho}) & \sin(\frac{\sigma(x)}{\rho}) \\ -\sin(\frac{\sigma(x)}{\rho}) & \cos(\frac{\sigma(x)}{\rho}) \end{pmatrix} \mathbf{n}(x)$$

Forslag til svar: Når disken har rullet en avstand $\sigma(x)$ mot høyre, har punktet på vektoren fra (X, Y) til randpunktet dreid en vinkel $\sigma(x)/\rho$ med klokka.

f) Anta at $\rho = 1/2$, bruk Matlab eller python til å plotte kurvene $\mathbf{s}(x)$, $(X(x), Y(x))$ og $\mathbf{r}(x)$ for $x \in [-2, 2]$ i samme diagram.

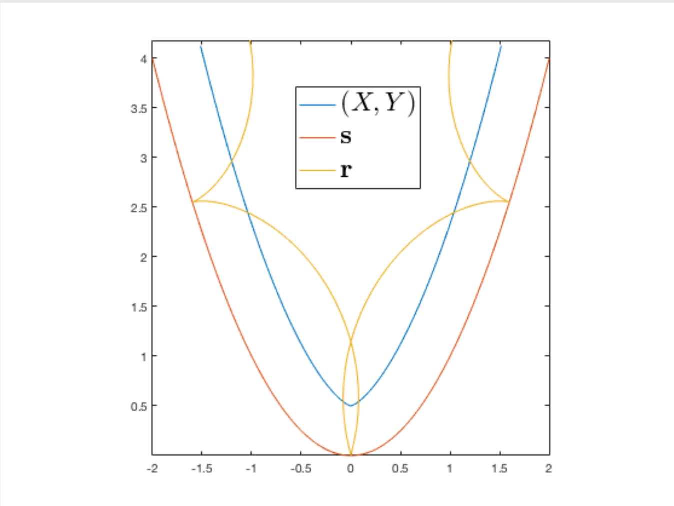
Forslag til svar: Her er et Matlab script som genererer kurvene:

```
function [X,Y,rx,ry,sx,sy]=oppg2e(x)
n=length(x);
rho=1/2;
X=zeros(size(x)); % Setter av plass til det som beregnes
Y=X; rx=X; ry=X; sx=X; sy=X;
for i=1:n,
    xx=x(i);
    sx(i)=xx; sy(i)=xx.^2;
    l=sqrt(1+4*xx.^2);
    nx=2*xx/l;
    ny=-1/l;
    sigma=(2*xx*l+asinh(2*xx))/4;
    t=sigma/rho;
    A=[cos(t) sin(t); -sin(t) cos(t)];
    M=rho*A*[nx;ny];
    X(i)=sx(i)-rho*nx;
    Y(i)=sy(i)-rho*ny;
    rx(i)=X(i)+M(1);
    ry(i)=Y(i)+M(2);
end
```

Kurvene blir generert og plottet med

```
>> x=linspace(-2,2,200); [X,Y,rx,ry,sx,sy]=oppg2e(x);
>> plot(X,Y,sx,sy,rx,ry); axis equal; axis tight;
```

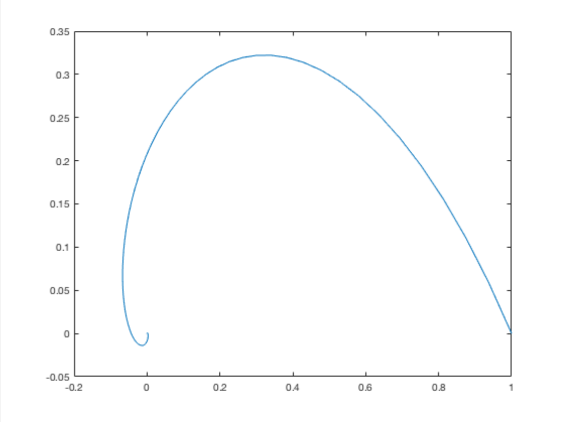
og ser slik ut:



Oppgave 3. La $\sigma(t)$ være kurven $\sigma(t) = \cos(t)\,\mathbf{i} + \sin(t)\,\mathbf{j}$, og sett $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\sigma(t)$.

a) Skissér kurven $\mathbf{r}(t)$ for $t \in [0, 4\pi]$.

Forslag til svar:



b) Finn lengden av linjestykket $\mathbf{r}(t)$ for $t \in [0, \infty)$.

Forslag til svar: Vi har at $\mathbf{r}'(t) = e^{-t}[(-\sin(t), \cos(t)) - (\cos(t), \sin(t))]$ så $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}e^{-t}$. Derfor blir

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\infty |\mathbf{r}'(t)|\, dt \\ &= \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-t}\, dt \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

c) Vis at $\mathbf{r}(t)$ tilfredsstiller differensialligningen

$$\mathbf{r}'(t) = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{r}(t), \qquad \mathbf{r}(0) = \mathbf{i}.$$

Forslag til svar: Vi ser at

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{r}(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ -\cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} = -\mathbf{r}'(t)$$

ifølge svaret over. Vi ser også at $\mathbf{r}(0) = (1, 0) = \mathbf{i}$.

Oppgave 4. Vi lar $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ betegne en vektor i $\mathbb{R}^n$. Et vektorfelt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kalles *sentralt* hvis det kan skrives på formen $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x}|)\mathbf{x}$, der f er en funksjon fra $[0, \infty) \to \mathbb{R}$.

a) Vis at sentrale vektorfelter konservative i $\mathbb{R}^n$ hvis f er kontinuerlig deriverbar og $\lim_{r \to 0} f'(r) = 0$.

Forslag til svar: Vi bruker Teorem 3.5.7 i boka. Vi må vise at F har kontinuerlige partiellderiverte i $\mathbb{R}^n$, og at $\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ for $i \neq j$. Vi har at $F_i = f(|\mathbf{x}|)x_i$, og derfor blir

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = f'(|\mathbf{x}|)\frac{\partial\,|\mathbf{x}|}{\partial x_j}x_i = f'(|\mathbf{x}|)\frac{x_i x_j}{|\mathbf{x}|} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i},$$

for $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Siden $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ ikke er enkeltsammenhengende må vi sjekke hva som skjer i $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi har at

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}) &= \lim_{h\to 0}\frac{F_i(h\mathbf{e}_j) - F_i(\mathbf{0})}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)0 - f(0)0}{h} = 0\end{aligned}$$

for $i \neq j$. Altså gjelder betingelsen i hele $\mathbb{R}^n$. For $i = j$ får vi at

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\mathbf{0}) &= \lim_{h\to 0}\frac{F_i(h\mathbf{e}_i) - F_i(\mathbf{0})}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)h - f(0)0}{h} = f(0).\end{aligned}$$

Vi må også sjekke at de partiellderiverte er kontinuerlige, siden f' er kontinuerlig, så er det bare origo som kan være problematisk. For kontinuiteten trenger vi også

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = f'(|\mathbf{x}|)\frac{x_i^2}{|\mathbf{x}|} + f(|\mathbf{x}|).$$

Vi har at

$$\left|\frac{x_i x_j}{|\mathbf{x}|}\right| \leq \frac{1}{2}\frac{x_i^2 + x_j^2}{|\mathbf{x}|} \leq \frac{1}{2}|\mathbf{x}|\,.$$

Derfor må

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{x_i x_j}{|\mathbf{x}|} = 0.$$

Dette medfører at

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & i \neq j,\\ f(0) & i = j.\end{cases}$$

Den oppmerksomme leser vi legge merke til at man faktisk *ikke* trenger betingelsen $\lim f'(h) = 0$, men at vi bare brukte at f' var kontinuerlig.

b) La $h(r)$ være en funksjon slik at $h'(r) = rf(r)$. Vis at $\phi(\mathbf{x}) = h(|\mathbf{x}|)$ er en potensialfunksjon til $\mathbf{F}$.

Forslag til svar: Vi må vise at $\nabla\phi = \mathbf{F}$.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = h'(|\mathbf{x}|)\frac{x_i}{|\mathbf{x}|} = |\mathbf{x}|\,f(|\mathbf{x}|)\frac{x_i}{|\mathbf{x}|} = f(|\mathbf{x}|)x_i = F_i(\mathbf{x}).$$

SLUTT