30. mai 2017

MAT1110

Obligatorisk oppgave 2 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 11. MAI 2017, klokken 14:30 i obligkassen, som står i gangen utenfor ekspedisjonen i 7. etasje i Niels Henrik Abels hus.

Instruksjoner

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd eller på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Alle besvarelser skal inkludere følgende offisielle forside:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-obligforside.pdf

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du skrive ut programkoden og levere denne sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir. For å skrive ut programkoden fra en av UiOs Linux-maskiner kan du gå til mappen hvor programmet ditt ligger og skrive

```
lpr -P pullprint_produsent filnavn
```

der `filnavn` er navnet på filen du ønsker å skrive ut og `pullprint_produsent` er navnet på produsenten av skriveren du ønsker å hente utskriften fra. Det er vanlig å enten bruke `pullprint_Ricoh` eller `pullprint_HP`.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (7. etasje i Niels Henrik Abels hus, e-post: studieinfo@math.uio.no) i god tid før innleveringsfristen. For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Oppgave 1. Anta at vi har et antall kuler som flytter seg mellom tre skåler; A, B og C. Hver tidsenhet vil halvparten av kulene i A flytte seg til B, halvparten av kulene i B flytte seg til C og halvparten av kulene i C flytte seg til A. La x_n, y_n og z_n betegne antall kuler i hhv. A, B og C etter n tidsenheter, og sett $\mathbf{x}_n = (x_n, y_n, z_n)$ (som kolonnevektor).

a) Finn en matrise M slik at

$$\mathbf{x}_{n+1} = \frac{1}{2} M \mathbf{x}_n.$$

Forslag til svar: Vi har at

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}z_n \\ y_{n+1} &= \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}y_n \\ z_{n+1} &= \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}z_n. \end{aligned}$$

Dette gir

$$\mathbf{x}_{n+1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_n = \frac{1}{2} M \mathbf{x}_n.$$

b) Finn egenverdiene og de tilhørende egenvektorene til M.

Forslag til svar: Vi har at

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)^3 + 1 \\ &= 1 - 3\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3 + 1 \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 2. \end{aligned}$$

Fra en av disse formene ser vi at $\lambda = 2$ er en rot, og polynomdivisjon med $\lambda - 2$ gir at de andre egenverdiene må være røtter i $\lambda^2 - \lambda + 1$, mao.

$$\lambda = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3}) = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2}. \end{cases}$$

Vi ser først på $\lambda = 2$, den utvidede matrisen for egenvektoren blir

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

altså er z fri, og $x = y = z$. Derfor blir

$$\lambda_1 = 2, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et egenverdi/egenvektor par.}$$

Siden de andre egenvektorene er komplekse, vet vi at hvis vi finner en egenvektor så vil den andre være den komplekskonjugerte av den første. Vi ser på $\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$. Den utvidede matrisen for egenvektoren blir (her er $\mu = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$)

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mu & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1+\mu^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nå er heldigvis $\mu^3 = -1$, og z blir fri, så $y = -\mu z$, $x = \mu^2 z$. Nå får vi egenverdi/egenvektor parene

$$\lambda_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \quad \mathbf{v}_{2,3} = z \begin{pmatrix} \mu^2 \\ -\mu \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \mp i\sqrt{3} \\ -2 \\ 1 \pm i\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

der vi har valgt $z = 2/\mu$.

c) Anta at $x_0 = 100$, $y_0 = z_0 = 0$. Uttrykk $\mathbf{x}_0$ som en lineærkombinasjon av egenvektorene og finn $\mathbf{x}_5$.

Forslag til svar: Her kan vi multiplisere direkte, men vi velger å uttrykke $\mathbf{x}_0$ ved egenvektorene. Hvis $\mathbf{x}_0 = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3$ får vi den utvidede matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} & 100 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1+i\sqrt{3} & 1-i\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{100}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{25}{3}(1+\sqrt{3}i) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{25}{3}(1-\sqrt{3}i). \end{pmatrix},$$

her har jeg fått hjelp fra Matlab. Dvs.

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{100}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{25}{3}(1+\sqrt{3}i)\begin{pmatrix} 1-i\sqrt{3} \\ -2 \\ 1+i\sqrt{3} \end{pmatrix} + \frac{25}{3}(1-\sqrt{3}i)\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3}i \\ -2 \\ 1-\sqrt{3}i \end{pmatrix}.$$

d) Finn $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n$.

Forslag til svar: Vi har at $|\lambda_{2,3}| = 1 < 2$ slik at

$$\mathbf{x}_n = \frac{100}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{25}{3}(1+\sqrt{3}i)\Big(\frac{\lambda_2}{2}\Big)^n \begin{pmatrix} 1-i\sqrt{3} \\ -2 \\ 1+i\sqrt{3} \end{pmatrix} + \frac{25}{3}(1-\sqrt{3}i)\Big(\frac{\lambda_3}{2}\Big)^n \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3}i \\ -2 \\ 1-\sqrt{3}i \end{pmatrix} \to \frac{100}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

når $n \to \infty$.

Oppgave 2. La A_n være $n \times n$ ($n > 2$) matrisen med elementer a_{ij} der

$$a_{ij} = \begin{cases} -2 & j = i, \\ 1 & j = i \pm 1 \text{ eller } i = 1,\ j = n \text{ eller } i = n,\ j = 1, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

a) Skriv ned A_5, og forklar hvorfor 0 er en egenverdi for A_n. Finn en egenvektor $\mathbf{v}^0$med egenverdi 0.

Forslag til svar:

$$A_5 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Summen av alle kolonnene i A_n er 0, som da blir en egenverdi. $\mathbf{v} = (1, \ldots, 1)$ blir en egenvektor til 0.

b) La $\mathbf{v}^k \in R^n$ $k = 0, \ldots, n-1$ være gitt ved $\mathbf{v}^k = (v_1^k, \ldots, v_n^k)$, der

$$v_j^k = \sqrt{2}\sin\Big(\frac{2\pi}{n}kj + \frac{\pi}{4}\Big), \qquad j = 0, \ldots, n-1.$$

Vis at $\mathbf{v}^k$ er en egenvektor til A_n og finn den tilhørende egenverdien.

Forslag til svar: Sett $\mathbf{x} = A\mathbf{v}^k$, da blir $(\tau = 2\pi k/n)$

$$\begin{aligned}
x_j &= v_{j+1}^k - 2v_j^k + v_{j-1}^k \qquad \text{(her blir } v_0^k = v_n^k \text{ og } v_{n-1}^k =: v_1^k) \\
&= \sqrt{2}\left(\sin((j+1)\tau + \frac{\pi}{4}) - 2\sin(j\tau + \frac{\pi}{4}) + \sin(\tau(j-1) + \frac{\pi}{4})\right) \\
&= \sin(\tau(j+1)) + \sin(\tau(j-1)) - 2\sin(\tau j) \\
&\quad + \cos(\tau(j+1)) + \cos(\tau(j-1)) - 2\cos(\tau j) \\
&= \sin(\tau j)\cos(\tau) + \cos(\tau j)\sin(\tau) + \sin(\tau j)\cos(\tau) - \cos(\tau j)\sin(\tau) - 2\sin(\tau j) \\
&\quad \cos(\tau j)\cos(\tau) + \sin(\tau j)\sin(\tau) + \cos(\tau j)\cos(\tau) - \sin(\tau j)\sin(\tau) - 2\cos(\tau j) \\
&= 2(\cos(\tau) - 1)(\sin(\tau j) + \cos(\tau j)) \\
&= 2(\cos(\tau) - 1)\sqrt{2}\sin(\tau j + \frac{\pi}{4}).
\end{aligned}$$

Altså ser vi at $\mathbf{v}^k$ er en egenvektor med egenverdi $2\Big(\cos\Big(\frac{2k\pi}{n}\Big) - 1\Big)$.

c) Forklar hvorfor mengden $\{\mathbf{v}^k\}_{k=0}^{n-1}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$.

Forslag til svar:
A_n er symmetrisk, derfor egenvektorene derfor er ortogonale og utgjør en basis, Teorem 4.10.10.

d) La $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ være gitt og definer følgen

$$\mathbf{x}_{l+1} = \left(I_n + \frac{1}{2}A_n\right)\mathbf{x}_l, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{y}.$$

Hva blir grensen $\lim_{l\to\infty} \mathbf{x}_l$? (Hint: Skriv $\mathbf{y}$ som en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}^k$-ene, bruk at disse er ortogonale.)

Forslag til svar: Merk at $\{\mathbf{v}^k\}$ også er egenvektorer til $I + A_n/2$, og egenverdien til $\mathbf{v}^k$ er $\cos(\frac{2k\pi}{n})$.

Anta først at n er et oddetall, da er $\left|\cos(\frac{2k\pi}{n})\right| < 1$ for $k = 1, \ldots, n-1$. Siden $\{\mathbf{v}^k\}_{k=0}^{n-1}$ er ortogonale, så blir

$$\mathbf{y} = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\frac{\mathbf{v}^k \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{v}^k|^2} \Big) \mathbf{v}^k.$$

Fra dette får vi at

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_l &= \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\cos\Big(\frac{k\pi}{n}\Big)\Big)^l \Big(\frac{\mathbf{v}^k \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{v}^k|^2} \Big) \mathbf{v}^k \\
&= \Big(\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}^0}{|\mathbf{v}^0|^2} \Big) \mathbf{v}^0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{|\mathbf{v}^k|^2} \cos^l\Big(\frac{k\pi}{n}\Big) \left(\mathbf{v}^k \cdot \mathbf{y}\right) \mathbf{v}^k.
\end{aligned}$$

Siden $|\cos\Big(\frac{k\pi}{n}\Big)| < 1$ så vil alle leddene i rekka gå mot null når l blir stor. Videre er $\left|\mathbf{v}^0\right|^2 = n$, så derfor blir

$$\lim_{l\to\infty} \mathbf{x}_l = \Big(\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}^0}{n} \Big) \mathbf{v}^0 = \frac{1}{n} \Big(\sum_{j=0}^{n-1} y_j \Big) \mathbf{v}_0.$$

Hvis n er et partall, så vil $\mathbf{v}^{n/2}$ ha egenverdi -1, og komponenter $\mathbf{v}_j^{n/2} = (-1)^j$. Da vil også $\left|\mathbf{v}^{n/2}\right|^2 = n$, og vi må ta ut denne av summen over. Vi får

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_l &= \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\cos\Big(\frac{k\pi}{n}\Big)\Big)^l \Big(\frac{\mathbf{v}^k \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{v}^k|^2} \Big) \mathbf{v}^k \\
&= \Big(\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}^0}{|\mathbf{v}^0|^2} \Big) + \Big(\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}^{n/2}}{|\mathbf{v}^{n/2}|^2} \Big) \mathbf{v}^0 + \sum_{k=1, k\neq n/2}^{n-1} \frac{1}{|\mathbf{v}^k|^2} \cos^l\Big(\frac{k\pi}{n}\Big) \left(\mathbf{v}^k \cdot \mathbf{y}\right) \mathbf{v}^k.
\end{aligned}$$

Alle leddene under summetegnet vil gå mot null når l vokser, og vi står igjen med

$$\lim_{l\to\infty} \mathbf{x}_l = \Big(\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}^0}{n} \Big) \mathbf{v}^0 + \lim_{l\to\infty} (-1)^l \Big(\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}^{n/2}}{n} \Big) \mathbf{v}^{n/2}.$$

Med mindre $\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}^{n/2} = 0$ vil ikke denne grensen eksistere.

Oppgave 3. Finn maksimum for funksjonen

$$f(x, y, z) = \log(x) + \log(y) + 3\log(z),$$

under bibetingelsene

$$x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\quad x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2,$$

der r er gitt. Bruk dette til å vise ulikheten

$$abc^3 \leq 27 \left(\frac{a+b+c}{5} \right)^5,$$

for alle positive tall a, b og c.

Forslag til svar: Bibetingelsen er gitt ved at $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2$. Ligningene blir da

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \qquad g(x) = 5r^2$$
$$\frac{1}{x} = 2\lambda x, \ \frac{1}{y} = 2\lambda y, \ \frac{3}{z} = 2\lambda z,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2.$$

Vi får at $\frac{5}{2\lambda} = 5r^2$, som gir at

$$x = y = r, \quad z = \sqrt{3}r.$$

Dette gir maksimalverdi

$$f(r,r,\sqrt{3}r) = \log(r) + \log(r) + 3\log(\sqrt{3}r) = \log(\sqrt{3}^3 r^5) =: M(r).$$

For å vise ulikheten har vi at $f(x,y,z) = M(r)$, etter å ha tatt exponensial på begge sider av ulikheten $f(x,y,z) \leq M(r)$ får vi

$$xyz^3 \leq \sqrt{3}^3 r^5 = 3^{3/2}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{5}\right)^{5/2}.$$

Velg a, b og c slik at $x^2 = a$, $y^2 = b$ og $z^2 = c$, ligningen over blir da

$$\left(abc^3\right)^{1/2} \leq 3^{3/2}\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^{5/2}.$$

Dette gir svaret.

Oppgave 4. Sett

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 + \alpha \\ 2xy + \beta \end{pmatrix},$$

der α og β er konstanter. Vi ønsker å løse ligningen $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

a) Vis at for alle α og β fins to løsninger; $\mathbf{x}_\pm$, som er slik at

$$\mathbf{x}_\pm = \begin{pmatrix} x_\pm \\ y_\pm \end{pmatrix}, \qquad x_- < \frac{1}{2} < x_+, \quad y_\pm = \frac{\beta}{1 - 2x_\pm}.$$

Forslag til svar: Vi løser først for y og får

$$y = 2xy + \beta \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\beta}{1-2x}.$$

Så kan vi sette inn i ligningen for x

$$x = x^2 - \left(\frac{\beta}{1-2x}\right)^2 + \alpha, \text{ eller } g(x) = x(x-1) = \frac{\beta^2}{(1-2x)^2} - \alpha = h(x).$$

Funksjonen g er en parabel med nullpunkter i 0 og 1 som er slik at $\lim_{|x|\to\infty} g(x) = \infty$. Funksjonen h har en vertikal asymptote i $x = 1/2$ og $\lim_{x\to 1/2} h(x) = \infty$, $\lim_{|x|\to\infty} h(x) = -\alpha$. Da vil grafene til g og h skjære hverandre i to punkter $x_- < 1/2 < x_+$.

Vi prøver å finne de to løsningene $\mathbf{x}_+$ og $\mathbf{x}_-$ ved enkel iterasjon;

$$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n), \; n \geq 0, \qquad \mathbf{x}_0 \text{ gitt.}$$

Vi observerer at dette ikke alltid konvergerer, og forsøk med forskjellige startverdier $\mathbf{x}_0$ gir ikke mye informasjon om hvilke startverdier som gir konvergens. Vi ønsker å lage et plot som viser hvilke startverdier som gir konvergens. For å gjøre dette trenger vi noen hjelpresultater.

b) Vis at

$$|\mathbf{x}_{n+1}| \geq |\mathbf{x}_n|^2 - |\mathbf{c}|\,,$$

der $\mathbf{c} = (\alpha, \beta)$.

Forslag til svar: Trekantulikheten medfører at $|\mathbf{x}_{n+1}| \geq |f(\mathbf{x}_n) - \mathbf{c}| - |\mathbf{c}|$, og enkel regning gir at $|f(\mathbf{x}) - \mathbf{c}| = |\mathbf{x}|^2$.

c) Vis at dersom $|\mathbf{x}_n| > M = (1 + \sqrt{1 + 4\,|\mathbf{c}|})/2$ for en n, så vil $\{\mathbf{x}_n\}_{n \geq 0}$ divergere.

Forslag til svar: La $g(t) = t(t-1)$, som i løsningsforslaget til a). Punkt b) gir da

$$|\mathbf{x}_{n+1}| - |\mathbf{x}_n| \geq |\mathbf{x}_n|^2 - |\mathbf{c}| - |\mathbf{x}_n| = g(|\mathbf{x}_n|) - |\mathbf{c}|.$$

Vi har $M > 1$, og $g'(t) > 1$ for $t > 1$. Så hvis n er slik at $|\mathbf{x}_n| > M$, gir middelverdisetningen

$$g(|\mathbf{x}_n|) > g(M) + 1 \cdot (|\mathbf{x}_n| - M).$$

Direkte utregning gir $g(M) = M(M-1) = |\mathbf{c}|$. Innsatt får vi

$$|\mathbf{x}_{n+1}| - |\mathbf{x}_n| > |\mathbf{x}_n| - M.$$

Det følger, formelt sett ved induksjon, at $|\mathbf{x}_k| \to \infty$ når $k \to \infty$.

Vi kan altså bruke $|\mathbf{x}_n| > M$ som en test på om iterasjonen konvergerer eller ikke. Vi kan også få et mål på hvor fort følgen divergerer ved å måle hvor mange iterasjoner skal til før $|\mathbf{x}_n| \geq M$.

d) Skriv et program (kalt f.eks. `oppg4d(x,y,c1,c2,M,N)`), i f.eks. Matlab eller python, som gitt initialdata (x_0, y_0), M og N, returnerer n/N, der

$$n = \min\left\{N, \min\left\{j \leq N \;\middle|\; |\mathbf{x}_j| \geq M\right\}\right\}.$$

Som en test skal $x = 0.325$, $y = 0.35$, $\mathbf{c} = (-0.8, 0.156)$ og $N = 800$ gi at at $n/N = 0.0138$.

Forslag til svar:

```
function t=oppg4d(x,y,c1,c2,M,maxiter)
n=0; norm=sqrt(x^2+y^2);
while (norm<M)&&(n < = maxiter),
   xh=(x^2-y^2)+c1;
   yh=2*x*y+c2;
   x=xh;
   y=yh;
   norm=sqrt(x^2+y^2);
   n=n+1;
end;
t=n/maxiter;
```

e) Skriv et program som tester initialdata i et rektiangel $[a, b] \times [c, d]$ for punkter på formen $(x_i, y_j) = (a + i(b-a)/K, c + j(d-c)/K)$ for $i = 0, \ldots, K$ og $j = 0, \ldots, K$, sett $C(i, j) =$ `oppg4d`$(x_i, y_j, \ldots)$. Bruk Matlab kommandoen `pcolor` eller lignende for å visualisere matrisen C for verdiene: $a = c = -1$, $b = d = 1$, $K = 800$, $N = 800$, $\alpha = -0.8025$, $\beta = 0.156$.
Hint: Det kan være morsomt å eksperimentere med andre verdier på a, b, c, d og (spesielt) α og β.

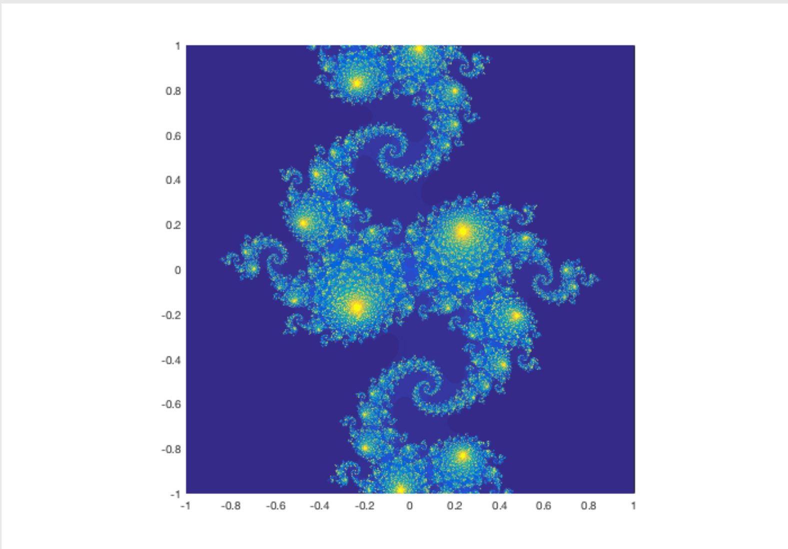
Forslag til svar:

```
function [C,x,y]=oppg4e(a,b,c,d,alpha,beta,maxiter,N)
M=(1+sqrt(1+4*sqrt(alpha^2+beta^2)))/2;

x=linspace(a,b,N);
y=linspace(c,d,N);

C=zeros(N,N);
for i=1:N,
  for j=1:N,
     C(i,j)=oppg4d(x(i),y(j),alpha,beta,M,maxiter);
  end;
end;
```

Matrisen C blir generert og plottet med:

```
>> [C,x,y]=oppg4e(-1,1,-1,1,-0.8025,0.156,800,800);
>> pcolor(x,y,C); axis equal, axis tight, shading interp;
```

Dette gir bildet:



SLUTT