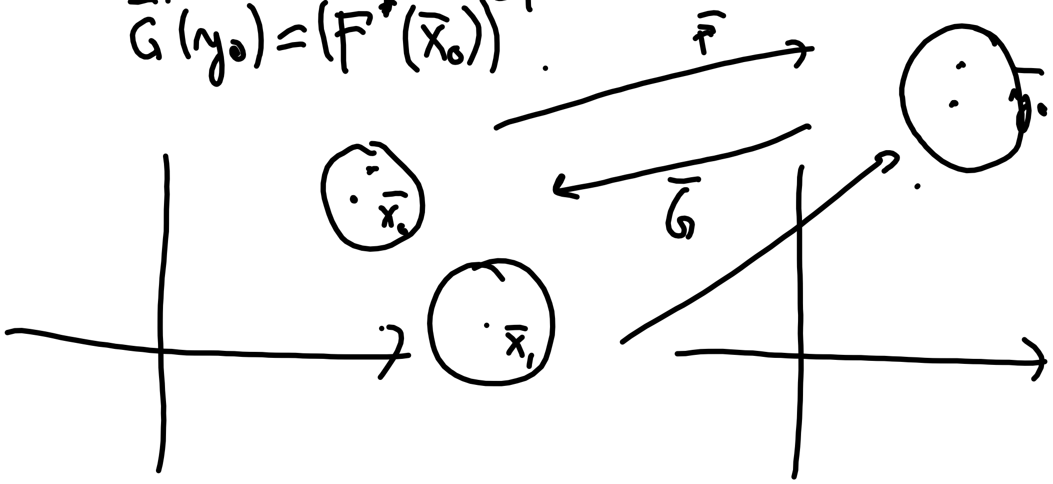
Omvendt funksjonsteorem.

$\bar{F}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^m$, $\bar{F}(\bar{x}_0) = \bar{y}_0$.

Hvis det $\bar{F}'(\bar{x}_0) \neq 0$, så har $\bar{F}$ en omvendt funksjon $\bar{G}$ nær $\bar{y}_0$ $(\bar{G}(\bar{y}_0) = \bar{x}_0)$ og

$$\bar{G}'(y_0) = (F'(\bar{x}_0))^{-1}.$$



5.7.1. $\bar{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y+1 \\ x-y-2 \end{pmatrix}$ $\qquad \bar{F}(\underbrace{0,0}_{\bar{x}_0}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\bar{y}_0}$

Har omvendt funksjon $\bar{G}$, def. nær $(1,-2)$ slik at $\bar{G}(1,-2) = (0,0)$:

$$\bar{F}'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \bar{F}'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det \bar{F}'(0,0) = -1$

Altså har vi slik $\bar{G}$.

$$\bar{G}'(1,-2) = \bar{F}'(0,0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

$$\bar{F}'(-1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det \bar{F}'(-1,-1) = 2-1 < 1$

$$\bar{F}(\underbrace{-1,-1}) = \begin{pmatrix} 1-1+1 \\ -1+1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\bar{F}$ har omvendt funksjon $\bar{H}$ definert nær $(1,-2)$ s.a. $\bar{H}(1,-2) = (-1,-1)$

$$\bar{H}'(1,-2) = \bar{F}'(-1,-1)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Implisitt funksjonsteorem: Hvis $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}$ er åpne $f(\bar{x}, y): U \times V \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}_0, y_0) = C$

og $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}_0, y_0) \neq 0$ så fins entydig funksjon $y(\bar{x})$ definert rundt $\bar{x}_0$ slik at $y(\bar{x}_0) = y_0$ og $\underbrace{f(\bar{x}, y(\bar{x})) = C}$.

Videre er $\frac{\partial y}{\partial x_i}(\bar{x}_0) = -\underbrace{\frac{\partial f / \partial x_i (\bar{x}_0, y_0)}{\partial f / \partial y (\bar{x}_0, y_0)}}$

$\boxed{f(\bar{x}, y) = C}$

Kortere sagt:

$\boxed{\text{Vi kan derivere ligningen } f(\bar{x}, y) = C \text{ implisitt m.h.p. alle } x_i \text{ og får da } \frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\partial f / \partial x_i}{\partial f / \partial y}}$

$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i} = 0}$

5.7.3. Når hvilket punkt på kurven $f = \underbrace{x^3 + y^3 + y = 1}$ kan vi løse y som funksjon av x.

Svar: $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 1 > 0$. Vi finner $\frac{\partial y}{\partial x}$ ved å derivere

Dette overalt uansett.

implisitt:

$$3x^2 + 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 0 \qquad \underline{\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2}{3y^2 + 1}}}$$

5.7.10. $z(x,y)$ oppfyller $x+y^2+z^3=3xyz$

Deriverer implisitt

M.h.p. x: $1+3z^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=3yz+3xy\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3yz-1}{3z^2-3xy}=\frac{3yz-1}{3(z^2-xy)}$ (Når $z^2-xy\neq 0$).

$2y+3z^2\frac{\partial z}{\partial y}=3xz+3xy\frac{\partial z}{\partial y}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3xz-2y}{3(z^2-xy)}$

5.83 $A \subset \mathbb{R}^m$ lukket og begrenset. $\bar{F}: A \to A$ er kontinuerlig.

(a) $\underline{f(\bar{x}) = |\bar{x} - \bar{F}(\bar{x})|}$ er kontinuerlig.

$\bar{x} - \bar{F}(\bar{x})$ er kont. $|\ \ |$ er også kontinuerlig, så da blir f kontinuerlig.

(b) $|\underbrace{\bar{F}(\bar{x}) - \bar{F}(\bar{y})}| < |\bar{x} - \bar{y}|$ når $\bar{x} \neq \bar{y}$, så har $\bar{F}$ et entydig fikspunkt.

$\boxed{\begin{array}{c} \leq c|\bar{x}-\bar{y}| \\ c<1. \end{array}}$

Bevis: $f(\bar{x})$ har et minimum $\bar{x}$ (Ekstremverdisetningen). Påstår at $\underline{\bar{F}(\bar{x}) = \bar{x}}$.

Hvis ikke, sett $\bar{y} = \bar{F}(\bar{x})$.

$\underline{f(\bar{y})} = |\bar{y} - \bar{F}(\bar{y})| = |\bar{F}(\bar{x}) - \bar{F}(\bar{y})| < |\bar{x} - \bar{y}| = |\bar{x} - \bar{F}(\bar{x})| = \underline{f(\bar{x})}$

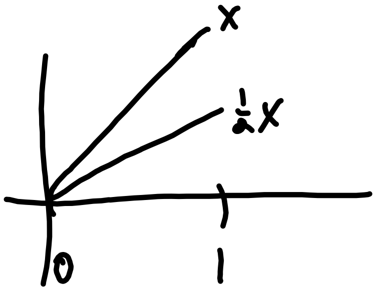
Strider mot at $\bar{x}$ var minimum.

Entydighet: Hvis $\bar{F}(\bar{x}) = \bar{x}$ og $\bar{F}(\bar{y}) = \bar{y}$, $\bar{x} \neq \bar{y}$, så er

$|\bar{x} - \bar{y}| = |\bar{F}(\bar{x}) - \bar{F}(\bar{y})| < |\bar{x} - \bar{y}|$ Umulig. A lukket + begrenset.

(c) Hvis vi dropper en betingelse på A er dette feil.

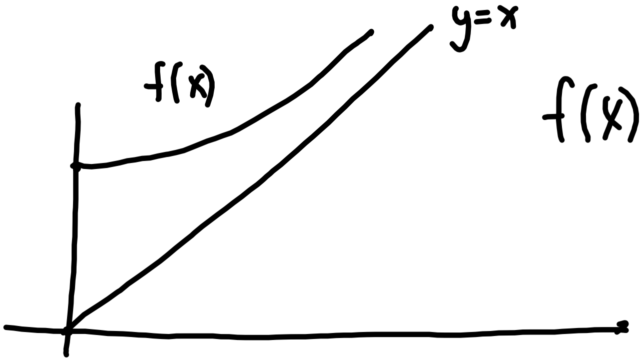
Lukket:



$f(x) = \frac{1}{2}x$ $(= x)$

$A = (0,1)$. Begrenset, ikke lukket.

Begrenset $A = [0, \infty)$



$$f(x) = x + \frac{1}{x+1}$$

f oppfyller

$|f(x) - f(y)| < |x - y|$

Har ikke fikspunkt.

$f(x,y)$

Stasjonært punkt: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$

Annenderiverttesten i ~~[illegible]~~ stasjonære punkter:

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ $D = AC - B^2$ (Hesse-det.)

$D>0$. $A>0$	Lokalt min.
$D>0$, $A<0$	Lokalt maks.
$D<0$	Sadelpunkt

$D=0$ Testen gir ingen konklusjon. Alle 3 er mulige.

5.98. $f = 2x^2y + 4xy - y^2$

a) Stasjonære punkter.

(I) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 4y = 4y(x+1) = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0 \ \vee \ x = -1.}$

(II) $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 4x - 2y = 0 \Rightarrow y = x^2 + 2x$

$y=0$. (II) gir $x^2 + 2x = 0$, $x = 0$, $x = -2$

$x = -1$ (II) gir $y = 1 - 2 = -1$

$\boxed{(0,0), (-2,0), (-1,-1)}$

b) Bestem typen.

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4(x+1) \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$

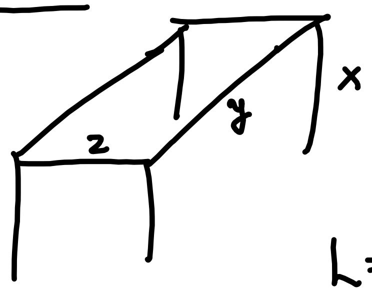
$D = AC - B^2 = -8y - 16(x+1)^2$

$(0,0)$, $D = -16$ Sadelpunkt.

$(-2,0)$, $D = -16$ —— " ——

$(-1,-1)$, $D = 8$, $A = -4$ Lokalt maks.

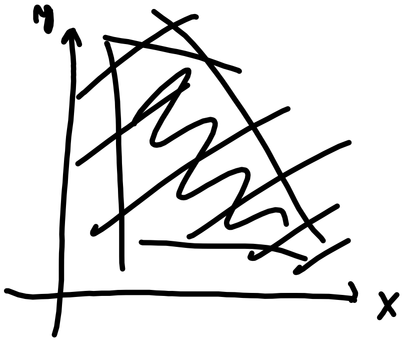
5.9.12.



Volum $V = xyz = 500 \qquad z = \frac{500}{xy}$

Hvordan oppnå med minst mulig lengde.

$$L = 4x + 2y + 2z = \boxed{4x + 2y + \frac{1000}{xy}}$$



$L \to \infty$ når $x \to 0$ eller $y \to 0$,

og når x eller $y \to \infty$.

L har derfor et minimum.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4 - \frac{1000}{x^2 y} = 0 \Rightarrow x^2 y = 250, \quad y = \boxed{250/x^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2 - \frac{1000}{xy^2} = 0 \Rightarrow xy^2 = 500, \quad x = 500/y^2$$

$$x = \frac{500}{y^2} = \frac{500}{\left(\frac{250}{x^2}\right)^2} = \frac{500x^4}{(250)^2} \qquad x^3 = 125$$

$x = 5.$

$y = 250/25 = 10$

$z = \frac{500}{xy} = 10.$

Lagrange multiplikator

Problem: Finn min/maks $f(\bar{x})$ når $\underbrace{g(\bar{x}) = c}$

Løsningen: $\left.\begin{array}{l} \nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla g(\bar{x}) \\ + \; g(\bar{x}) = c \end{array}\right\}$ Løs dette.

($\nabla g(\bar{x}) = \bar{0}$ også mulig min/maks)

5.16.2. Finn punktene på flaten $\underbrace{z^2 - xy = 1}_{g}$ som ligger nærmest origo

Svar: Vi må minimere $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ (= avstand^2)

på flaten. $\nabla f = \lambda \nabla g$.

(I) $2x = -\lambda \cdot y$ $\quad x = -\frac{1}{2}\lambda y$

(II) $2y = -\lambda x$ $\quad y = -\frac{1}{2}\lambda x$

(III) $2z = \lambda \cdot 2z$

$z^2 - xy = 1.$

$x = -\frac{1}{2}\lambda y = \frac{1}{4}\lambda^2 x$

To muligheter: 1) $x=0$, 2) $\lambda^2 = 4$.

$x=0$ gir $y=0$, $z^2=1$, $\quad z = \pm 1$ $\quad (0,0,\pm 1)$ $\quad f = 1.$

$\lambda = \pm 2$ Får $x = \mp y$

III gir $2z = \pm 4z \Rightarrow z = 0.$ Også $\left.\begin{array}{l} 1 = -xy = x^2 \\ x = \pm 1, \; y = \mp 1 \end{array}\right|$ $f = 2.$

Svar: To punkter $\quad (0,0,\pm 1)$