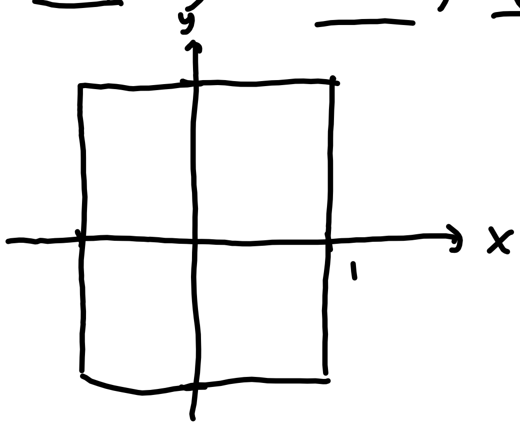
5.1

Ekte ulikheter ($>$ ): Åpen mengde. Ingen randp. med.

Vekte ulikheter ($\leq$ ): Lukket mengde. Alle randp. med.

Blanding ($>$, $\geq$): Ingen av delene. Noen, ikke alle randp. er med.

5.1.1. a) $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$. Lukket fordi alle kantene

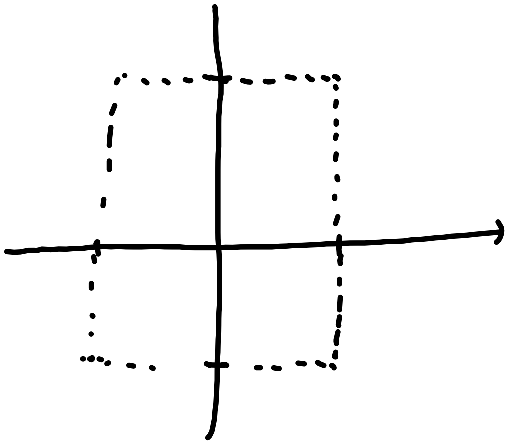



$x = \pm 1, |y| \leq 1$

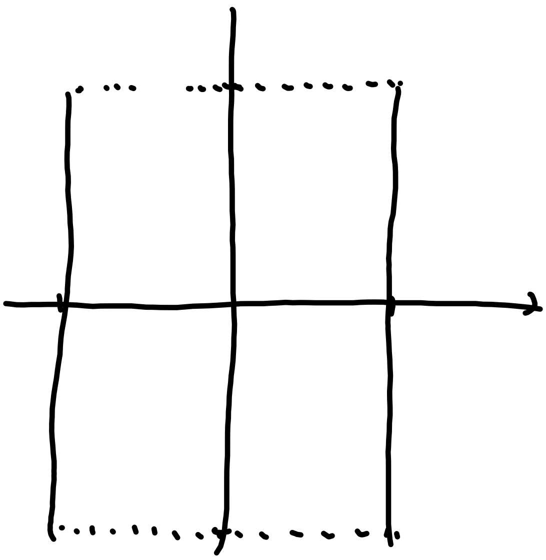
$y = \pm 1, |x| \leq 1$

er med i mengden.

b) $|x| < 1$, $|y| < 1$ Åpen siden ingen av kantene.



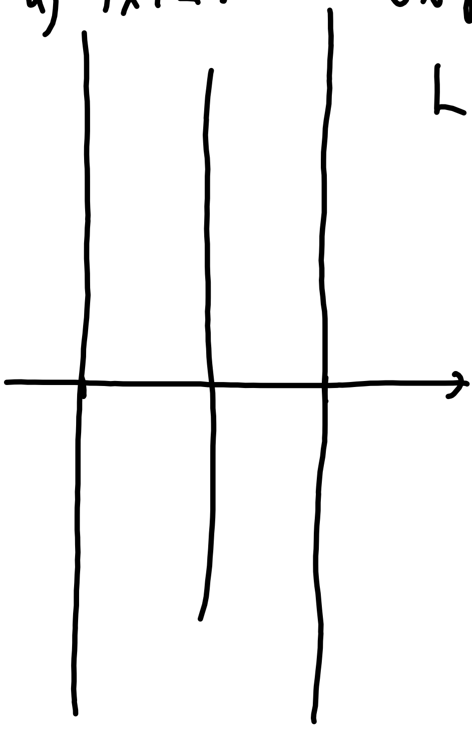
c) $|x| \leq 1$ og $|y| < 1$ Hverken åpen eller lukket, siden noen, men ikke alle kantene er med.



d) $|x| \leq 1$

Ubegrenset i y-retning.

Lukket siden begge kantene er med.

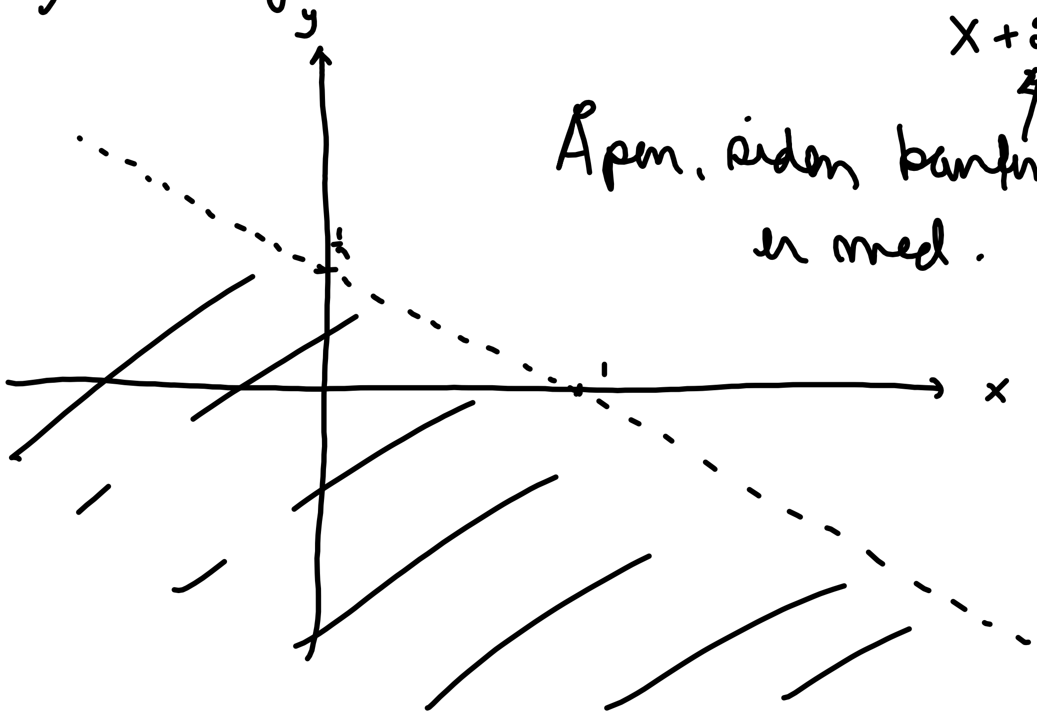


e) $x + 2y < 1$

Randkurve

$x + 2y = 1$

Åpen, siden kurven ikke er med.



5.1.2.

a) $\bar{x}_n = \left( \frac{2n^2+1}{n^2+3n}, \frac{3n}{1-2n} \right)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2+3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+1/n^2}{1+3/n} = \frac{2+0}{1+0} = \underline{\underline{2.}}$$

$$\lim \frac{3n}{1-2n} = \lim \frac{3}{1/n - 2} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim \bar{x}_n = \left(2, -\frac{3}{2}\right)$$

b) $\bar{x}_n = \left( n \sin\frac{1}{n}, n\left(1-e^{2/n}\right) \right)$

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \underline{\underline{1.}}$$

$x = \frac{1}{n}$

$$\lim n\left(1-e^{2/n}\right) = \lim \frac{1-e^{2/n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^{2x}}{x} \overset{L'H}{=}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2e^{2x}}{1} = -\frac{2e^0}{1} = \underline{-2}$$

$$\underline{\lim \bar{x}_n = (1, -2)}$$

**5.1.4.** Anta $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^m$, $\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n = \bar{b}$.

Da $\lim |\bar{x}_n - \bar{a}| = |\bar{b} - \bar{a}|$

(Avstanden til et gitt punkt $\bar{a}$ er en kontinuerlig funksjon)


$|t| < a \Leftrightarrow -a < t < a$

Bevis:

$$\big|\, |\bar{x}_n - \bar{a}| - |\bar{b} - \bar{a}| \,\big| \leq |\bar{x}_n - \bar{b}|$$

$$\Updownarrow$$

$$-|\bar{x}_n - \bar{b}| \leq |\bar{x}_n - \bar{a}| - |\bar{b} - \bar{a}| \leq |\bar{x}_n - \bar{b}|$$

$$|\bar{x}_n - \bar{a}| \leq |\bar{x}_n - \bar{b}| + |\bar{b} - \bar{a}|$$

$(|\bar{x} + \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}|)$

Trekantulikheten

$$|\bar{b} - \bar{a}| \leq |\bar{x}_n - \bar{b}| + |\bar{x}_n - \bar{a}|$$

$$= |\bar{b} - \bar{x}_n| + |\bar{x}_n - \bar{a}|$$

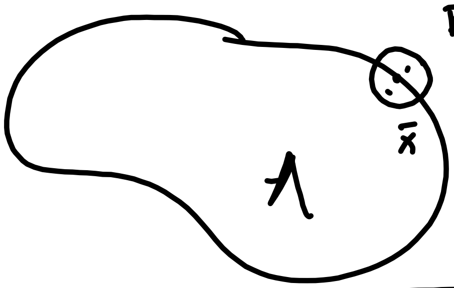
$(|-\bar{x}| = |\bar{x}|)$

Vi vet $\lim \bar{x}_n = \bar{b} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |\bar{x}_n - \bar{b}| = 0$

$$\Rightarrow \lim |\bar{x}_n - \bar{a}| - |\bar{b} - \bar{a}| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} |\bar{x}_n - \bar{a}| = |\bar{b} - \bar{a}|$$

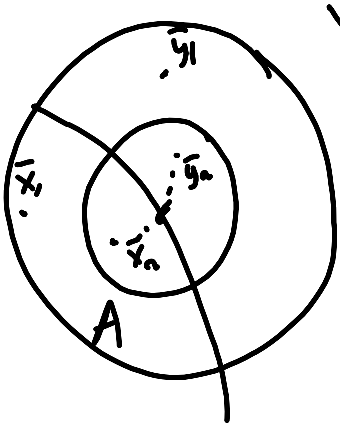
5.1.6.




$B(\bar{x}, r)$ inneholder både punkter i $A$ og punkter utenfor $A$.
(dvs randpunkt)

Hvis $\bar{c}$ er et randpunkt for $A$, så fins to følger $\{\bar{x}_n\}$ og $\{\bar{y}_n\}$ som begge konvergerer mot $\bar{c}$ slik at $\bar{x}_n \in A$ og $\bar{y}_n \notin A$ for alle $n$.

Bevis: Velg $\bar{x}_1, \bar{y}_1 \in B(\bar{c}, 1)$ med $\bar{x}_1 \in A, \bar{y}_1 \notin A$.




Velg så $\bar{x}_2, \bar{y}_2 \in B(\bar{c}, 1/2)$, $\bar{x}_2 \in A$, $\bar{y}_2 \notin A$.

Fortsetter og velger for alle $n$

$$\underbrace{\bar{x}_n, \bar{y}_n \in B(\bar{c}, 1/n)}_{|\bar{x}_n - \bar{c}| < \frac{1}{n},\ |\bar{y}_n - \bar{c}| < \frac{1}{n}}, \quad \bar{x}_n \in A, \quad \bar{y}_n \notin A.$$

$$\lim_{n\to\infty} |\bar{x}_n - \bar{c}| = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim \bar{x}_n = \bar{c}$$

$$\lim |\bar{y}_n - \bar{c}| = 0 \qquad\qquad \lim \bar{y}_n = \bar{c}$$

$\{\bar{x}_n\}, \{\bar{y}_n\}$ oppfyller betingelsene.

5.2. $\{\bar{x}_n\}$ følge i $\mathbb{R}^m$

En delfølge $\{\bar{y}_k\}$ er slik at $\bar{y}_k = \bar{x}_{n_k}$ der

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

$$\bar{x}_1, \cancel{\bar{x}_2}, \bar{x}_3, \cancel{\bar{x}_4}, \cdots, \bar{x}_n, \cdots$$

Eks $\bar{y}_k = \bar{x}_{2k-1}$ $\qquad x_1, x_3, x_5,$

$y_1, y_2, y_3 \cdots$

$n_k \geq k.$

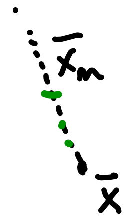
$\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n = \bar{x}$ hvis det til enhver $\varepsilon > 0$ fins N slik at $|\bar{x}_n - \bar{x}| < \varepsilon$ når $n \geq N$.

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} |\bar{x}_n - \bar{x}| = 0$$

**5.2.1.** Hvis $\lim \bar{x}_n = \bar{x}$, så vil enhver delfølge også konvergere mot $\bar{x}$.

**Bevis:** La $\bar{y}_k = \bar{x}_{n_k}$ være delfølge og




la $\varepsilon > 0$. Da fins $N$ slik at

$|\bar{x}_n - \bar{x}| < \varepsilon$ når $n \geq N$. Hvis $k \geq N$ så er

$|\bar{y}_k - \bar{x}| = |\bar{x}_{n_k} - \bar{x}| < \varepsilon$ fordi $n_k \geq k \geq N$.

Altså er $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{y}_k = \bar{x}$

$\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ er et opphopningspunkt for følgen $\{\bar{x}_n\}$ hvis enhver kule $B(\bar{x}, r)$ inneholder uendelig mange $\bar{x}_n$.

$\bar{x}_1, \bar{x}_3, \ldots \qquad \bar{x}_n, x_4, \ldots$

$1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

Alle hele tall er opph. punkt for denne følgen.

**5.2.4.** $\bar{x}$ er opphopningspunkt for $\{\bar{x}_n\}$

$\Updownarrow$

$\{\bar{x}_n\}$ har en delfølge som konvergerer mot $\bar{x}$.

Bevis: $\Downarrow$ $B(\bar{x},1)$ inneholder uendelig mange $\bar{x}_n$,
velg en slik $\bar{x}_{n_1}$

$B(\bar{x},\frac{1}{2})$ inneholder uendelig mange $\bar{x}_n$,
velg en slik $\bar{x}_{n_2}$. Vi kan anta at $n_2 > n_1$
siden vi har uendelig mange.

Vi velger $\bar{x}_{n_k} \in \underbrace{B(\bar{x},1/k)}$ slik at $n_k > n_{k-1}$.

Da er $\bar{y}_k = \bar{x}_{n_k}$ en delfølge og $\lim_{k\to\infty} |\bar{y}_k - \bar{x}| = 0$,

så $\bar{y}_k$ konvergerer mot $\bar{x}$.

$\Uparrow$ La nå $\{\bar{y}_k\} = \{\bar{x}_{n_k}\}$ være delfølge som konvergerer mot $\bar{x}$.
og la $r>0$. Da finnes en $N$ slik at $|\bar{y}_k - \bar{x}| < r$ når $k \geq N$.
Men da er jo $\bar{x}_{n_k} \in B(\bar{x},r)$ for $k \geq N$, dvs uendelig mange.

b) Enhver følge $\{\bar{x}_n\}$ i en lukket og begrenset mengde $A$
har et opphopningspunkt i $A$.

Bevis: $\{\bar{x}_n\}$ er begrenset og har derfor en
konvergent delfølge i følge Bolzano-Weierstrass.
Grensepunktet $\bar{x}$ må være i $A$ siden $A$ er lukket.
(Setning 5.1.8) $\bar{x}$ er et opphopningspunkt for $\{\bar{x}_n\}$
i følge a).

c) Hvis $A \subset \mathbb{R}^m$ ikke er lukket, så finnes en følge i $A$
som ikke har opphopningspunkt i $A$.

Bevis: Hvis $A$ ikke er lukket, så har
$A$ et randpunkt $\bar{x}$ som ikke er i $A$.


Siden $\bar{x}$ er et randpunkt, finnes for hver $k$
en $\bar{x}_k \in A$ og $\bar{x}_k \in B(\bar{x},1/k)$. Det følger at
$\lim_{k\to\infty} \bar{x}_k = \bar{x}$

$\{\bar{x}_k\}$ kan ikke ha opphp. $\bar{y} \in A$, for da hadde vi
en delfølge som konvergerte mot $\bar{y}$ (pga. a)). Men i følge
oppgave 5.2.1 konvergerer enhver delfølge mot $\bar{x}$.

d) Hvis $A \subset \mathbb{R}^m$ ikke er begrenset, så fins en følge i $A$ som ikke har noe opphopningspunkt i $A$ (heller ikke i $\mathbb{R}^m$).

<u>Bevis:</u> Siden $A$ er ubegrenset fins for hver $m$ en $\bar{x}_m \in A$ slik at $|\bar{x}_m| > m$. $\{\bar{x}_m\}$ har ikke opphopningspunkt, ellers ville den ha konvergent delfølge $\{\bar{y}_k\}$. Men $|\bar{y}_k| > k$, altså ubegrenset og ikke konvergent.

$$\bar{y}_k = \bar{x}_{m_k}$$

<u>Teorem</u> $A \subset \mathbb{R}^m$ er lukket og begrenset (kompakt)

$$\Updownarrow$$

Enhver følge i $A$ har en delfølge som konvergerer i $A$.