UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Ny/Utsatt eksamen i:	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra
Eksamensdag:	Fredag 18.august, 2017.
Tid for eksamen:	09:00 – 13:00
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

La A være matrisen

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1a 10 poeng

Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

Forslag til svar: Egenverdiene blir 1, med egenvektor $(1, 1)$ og $-1/3$, med egenvektor $(1, -1)$.

1b 10 poeng

Definer en følge $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ved

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad n \geq 0.$$

Finn grensen

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Forslag til svar: Vi har at

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Derfor får vi at

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}1^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(-\frac{1}{3})^n\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Fra dette ser vi at $(x_n, y_n) \to (1, 1)/2$.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

2a 10 poeng

Finn konvergensradien til rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}, \qquad (n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1,\ 0! = 1).$$

Forslag til svar: Vi bruker forholdstesten,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{x^2}{n+1} \to 0 \text{ når } n \to \infty \text{ for alle } x.$$

Derfor blir konvergensradien ∞.

2b 10 poeng

La

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n}.$$

Finn $f(1/2)$.

Forslag til svar: Vi har at $xf(x) = \sum \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$ så

$$\frac{d}{dx}(xf(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Derfor blir

$$xf(x) = \int_0^x \frac{1}{1-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|,$$

hvor jeg har brukt betingelsen $f(0) = 1$. Da får vi

$$f(1/2) = \frac{1}{2\frac{1}{2}} \ln\left|\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right| = \ln(3).$$

Oppgave 3 10 poeng

Hva er den største verdien funksjonen $f(x,y,z) = xyz^2$ kan ha når (x,y,z) ligger på kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

Forslag til svar: Lagranges metode, ligningene blir

$$\begin{aligned} yz^2 &= \lambda 2x \\ xz^2 &= \lambda 2y \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1. \\ 2xyz &= \lambda 2z \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 3.)

$\lambda = 0$ gir $f = 0$ som ikke er den største verdien. Vi deler ligning 1 på ligning 2 og ligning 2 på ligning 3 og får $x^2 = y^2$ og $z^2 = 2y^2$. Insatt i den fjerde ligningen gir dette $4x^2 = 1$, $x = \pm 1/2$, $y = \pm 1/2$, $z = \pm 1/\sqrt{2}$. Vi sjekker verdien i alle 8 punktene og får den største verdien $f(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}) = 1/8$.

Oppgave 4

La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2+1}\,\mathbf{i} - \frac{x}{x^2+y^2+1}\,\mathbf{j}.$$

4a 10 poeng

Finn Jacobimatrisen $\mathbf{F}'(x,y)$ til $\mathbf{F}$, og lineariseringen til $\mathbf{F}$ om punktet $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Forslag til svar:

$$\mathbf{F}'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2xy}{(x^2+y^2+1)^2} & \frac{x^2-y^2+1}{(x^2+y^2+1)^2} \\ \frac{x^2-y^2-1}{(x^2+y^2+1)^2} & -\frac{2xy}{(x^2+y^2+1)^2} \end{pmatrix}.$$

Vi har $\mathbf{F}(0,0) = \mathbf{0}$, og $\mathbf{F}'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Dette gir lineariseringen

$$L_{\mathbf{F}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{F}(x_0,y_0) + \mathbf{F}'(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix},$$

mao.

$$L_{\mathbf{F}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}.$$

4b 10 poeng

Er $\mathbf{F}$ konservativt? (Svaret skal begrunnes)

Forslag til svar: $\mathbf{F}$ er ikke konservativt siden $\frac{\partial F_1}{\partial y} \neq \frac{\partial F_2}{\partial x}$.

4c 10 poeng

La $\mathcal{C}$ være kurven med parameterframstilling $\mathbf{r}(t) = \cos(t)\,\mathbf{i} + \sin(t)\,\mathbf{j}$, $t \in [0, 2\pi]$. Regn ut

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

(Fortsettes på side 4.)

Forslag til svar: Vi har at

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \frac{1}{2}(\sin(t), -\cos(t)), \quad \text{og} \quad \mathbf{r}'(t) = (-\sin(t), \cos(t)),$$

slik at

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} -1\, dt = -\pi.$$

Oppgave 5

5a 10 poeng

La A være området i planet gitt ved $A = \left\{(x, y) \mid \frac{\pi}{4} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{\pi}{3}\right\}$. Regn ut

$$\iint_A \frac{\tan\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy.$$

Forslag til svar: Vi bruker polarkoordinater,

$$\begin{aligned}
\iint_A \frac{\tan\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \int_0^{2\pi} \tan(\rho)\, d\theta d\rho \\
&= -2\pi \ln(\cos(\rho)) \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} \\
&= -2\pi \left(\ln(1/2) - \ln(1/\sqrt{2})\right) \\
&= 2\pi \ln(\sqrt{2}) \approx 2.18.
\end{aligned}$$

5b 10 poeng

La B være området i planet gitt ved $B = \left\{(x, y) \mid \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x},\ 1 \leq x \leq 7\right\}$. Regn ut

$$\iint_B xy^2\, dxdy.$$

Forslag til svar:

$$\begin{aligned}
\iint_B xy^2\, dxdy &= \int_1^7 x \int_{1/x}^{2/x} y^2\, dy\, dx \\
&= \int_1^7 x \frac{7}{3}\frac{1}{x^3}\, dx \\
&= \frac{7}{3}\int_1^7 \frac{dx}{x^2} = \frac{7}{3}\frac{6}{7} = 2.
\end{aligned}$$

(Fortsettes på side 5.)

SLUTT