UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT1110 PRØVE — Kalk og linalg, prøveksamen.
Eksamensdag:	tidlig i juni 2017
Tid for eksamen:	15:00 – 19:00

Oppgavesettet er på 5 sider.

Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	"Godkjent" kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

La punktet (x, y) ligge på ellipsen E med ligning

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1a

Finn ligningen for tangenten til ellipsen gjennom (x_0, y_0) der (x_0, y_0) ligger på E og $x_0 > 0$, $y_0 > 0$.

Forslag til svar: Ligningen for tangenten blir $\mathbf{n} \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$ der $\mathbf{n}$ er en normalvektor til E i (x_0, y_0). Vi har at $\mathbf{n} = (2x_0/a^2, 2y_0/b^2)$ så derfor blir linja gitt ved

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

1b

Finn skjæringspunktene til tangenten med x-aksen og y-aksen. Vi kaller disse X og Y.

Forslag til svar: Vi får at $Xx_0/a^2 = 1$, derfor blir $X = a^2/x_0$, tilsvarende $Y = b^2/y_0$.

1c

Finn det minste arealet trekanten med hjørner X, Y og origo kan ha.

(Fortsettes på side 2.)

Forslag til svar: Vi vil minimere XY gitt at (x_0, y_0) (heretter kalt (x, y)) ligger på E. Dvs. finn minimum av $f(x, y) = a^2b^2/xy$ gitt at $g(x, y) = x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Vi bruker Lagranges metode. Ligningene blir

$$-\frac{a^2b^2}{x^2y} = \lambda\frac{2x}{a^2} \qquad -\frac{a^2b^2}{xy^2} = \lambda\frac{2y}{b^2} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Vi deler de to første ligningene på hverandre og får $x^2/a^2 = y^2/b^2$. Innsatt i den siste gir dette $x = a/\sqrt{2}$ og $y = b/\sqrt{2}$. Dette er et minimum, og arealet blir

$$A = f(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})/2 = ab.$$

Oppgave 2

2a

Finn Taylorrekka til funksjonen

$$f(x) = x^2e^{3x}$$

utviklet i punktet $a = 0$, og begrunn at rekken konvergerer mot $f(x)$ for alle reelle tall x.

Forslag til svar: Vi har at

$$f(x) = x^2e^{3x} = x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}3^nx^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}3^nx^{n+2}.$$

Rekka konvergerer for alle x siden rekka for e^{3x} gjør det.

2b

Bestem tallet $k > 0$ slik at potensrekka

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{k^n}(x-3)^n$$

har konvergensradius 1.

Forslag til svar: Konvergensradien til rekka $\sum a_n(x - x_0)^n$ er gitt ved

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}}.$$

Vi har at $a_n = (n^2 + 2n)/k^n$ og da blir

$$|a_n|^{1/n} = \frac{(n^2+2n)^{1/n}}{k}.$$

(Fortsettes på side 3.)

Vi har at $(n^2+2n)^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln(n^2+2n)}$, videre blir

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n^2+2n)}{n} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{n^2+2n} = 0.$$

Altså får vi at

$$1 = r = \frac{1}{\frac{e^0}{k}} = k.$$

Oppgave 3

En kurve er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (t+\cos(t))\,\mathbf{i} + \sin(t)\,\mathbf{j}, \qquad t\in[0,2\pi].$$

Hvor lang er kurven?

Forslag til svar: Vi får

$$\left|\mathbf{r}'(t)\right|^2 = 2-2\sin(t) = 4\sin^2\Big(\frac{t-\pi/2}{2}\Big).$$

Dette gir

$$\begin{aligned}
L &= 2\int_0^{2\pi}\left|\sin\Big(\frac{t-\pi/2}{2}\Big)\right|\,dt \\
&= 2\Big(-\int_0^{\pi/2}\sin\Big(\frac{t-\pi/2}{2}\Big)\,dt + \int_{\pi/2}^{2\pi}\sin\Big(\frac{t-\pi/2}{2}\Big)\,dt\Big) \\
&= 2\Big(2\cos\Big(\frac{t-\pi/2}{2}\Big)\Big|_0^{\pi/2} - 2\cos\Big(\frac{t-\pi/2}{2}\Big)\Big|_{\pi/2}^{2\pi}\Big) \\
&= 2\Big(2(1-1/\sqrt{2}) - 2(-1/\sqrt{2}-1)\Big) \\
&= 8.
\end{aligned}$$

Oppgave 4

Betrakt ligningssystemet

$$\begin{aligned}
3x+y+u &= 1 \\
2x+z+u &= 1 \\
x+y+u &= 1.
\end{aligned}$$

4a

Finn den generelle løsningen på systemet.

(Fortsettes på side 4.)

Forslag til svar: Vi har den utvidede matrisen

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Altså er $x = 0$, u fri, $y = z = 1 - u$, setter vi $u = t$, $t \in \mathbb{R}$ får vi

$$(x, y, z, u) = (0, 1 - t, 1 - t, t).$$

4b

La $f(x, y, z, u) = x^2 + 2y + z^2 + 4u$. Hva blir den minste verdien til f dersom x, y, z og u løser ligningssystemet?

Forslag til svar: Dersom (x, y, z, u) er en løsning blir $f(x, y, z, u) = 0^2 + 2(1 - t) + (1 - t)^2 + 4t = 2 - 2t + t^2 - 2t + 1 + 4t = 3 + t^2 \geq 3$, så minste verdi er 3.
Denne oppgaven kan også løses med Lagranges metode.

Oppgave 5

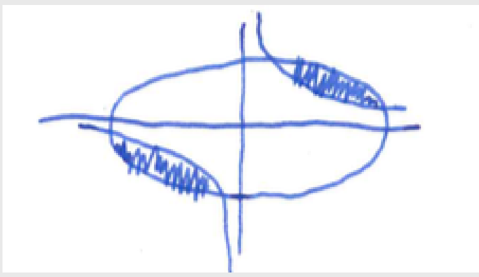
La A være gitt ved

$$A = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + 4y^2 < 5 \text{ og } xy > 1\right\}.$$

5a

Skisser A.

Forslag til svar:



(Fortsettes på side 5.)

5b

Finn

$$\iint_A 2xy\,dxdy.$$

Forslag til svar: A består av to like store deler, en der $x > 0$ og $y > 0$ og en der $x < 0$ og $y < 0$. Dette gir at hele integralet er dobbelt så stort som integralet over en av bitene. første kvadrant. Stykket i første kvadrant kan skrives som $1 < x < 2$ og $1/x < y < \frac{1}{2}\sqrt{5-x^2}$. Integralet blir derfor

$$\begin{aligned} a &= \int_1^2 \int_{1/x}^{\sqrt{5-x^2}/2} 2xy\,dydx \\ &= \int_1^2 \frac{5x - x^3}{4} - \frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{5}{8}(4-1) + \frac{1}{16}(16-1) - \ln(2) \\ &= \frac{15}{16} - \ln(2). \end{aligned}$$

Da blir det totale integralet

$$\frac{15}{8} - 2\ln(2) \approx 0.4887.$$

THE END