UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1110 — Kalkulus og lineær algebra
Eksamensdag:	Onsdag 15. Juni 2016.
Tid for eksamen:	9:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver (1a, 1b, 2, 3a, 3b, osv.) teller 10 poeng. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1. La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 19/20 & 3/20 \\ 3/20 & 11/20 \end{pmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.
Svar: Den karakteristiske likningen blir

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= (\lambda - 19/20)(\lambda - 11/20) - 9/400 \\ &= \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{209}{400} - \frac{9}{400} = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

slik at egenverdiene blir

$$\lambda = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4},$$

som gir $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/2$.
Vi har at

$$I - A = \begin{pmatrix} 1/20 & -3/20 \\ -3/20 & 9/20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Komponentene i en egenvektor for $\lambda_1 = 1$ må dermed oppfylle $x = 3y$, slik at en egenvektor må være på formen $\begin{pmatrix} 3y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Vi har at

$$\frac{1}{2}I - A = \begin{pmatrix} -9/20 & -3/20 \\ -3/20 & -1/20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -9 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Fortsettes på side 2.)

Komponentene i en egenvektor for $\lambda_2 = 1/2$ må dermed oppfylle $y = -3x$, slik at en egenvektor må være på formen $\begin{pmatrix} x \\ -3x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) Skriv vektoren $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 23 \\ 1 \end{pmatrix}$ som en sum av egenvektorer, og regn ut grenseverdien $\lim_{n\to\infty} A^n \boldsymbol{w}$.

Svar: Velger vi $y = 1$ i uttrykket $\begin{pmatrix} 3y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ for egenvektorene for $\lambda_1 = 1$ fra a) får vi spesielt egenvektoren $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Velger vi $x = 1$ i uttrykket $\begin{pmatrix} x \\ -3x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ for egenvektorene for $\lambda_2 = 1/2$ fra a) får vi spesielt egenvektoren $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ er derfor en basis av egenvektorer. For å skrive $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 23 \\ 1 \end{pmatrix}$ som en lineær kombinasjon av disse radreduserer vi

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 23 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 23 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 10 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

slik at $\boldsymbol{w} = 7\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2$. Vi får dermed

$$\lim_{n\to\infty} A^n \boldsymbol{w} = \lim_{n\to\infty} A^n (7\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2) = \lim_{n\to\infty} \left(7\boldsymbol{v}_1 + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \boldsymbol{v}_2 \right) = 7\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Oppgave 2. Bruk Lagrange's multiplikatormetode til å finne det punktet hvor funksjonen $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$ har sitt minimum under betingelsen $x + y + z = 1$. Hva kan du si om maksimum?

Svar: Vi har at $\nabla f = (2x, 8y, 18z)$, og $\nabla g = (1, 1, 1)$. Det er umulig å få $\nabla g = \mathbf{0}$, slik at vi bare trenger se på gradientlikningen $\nabla f = \lambda \nabla g$. Siden komponentene i vektoren på høyre side er like, så må de også være det på venstre side, slik at $2x = 8y = 18z$, og dermed $x = 9z$, $y = 9z/4$. Setter vi dette inn i $x + y + z = 1$ får vi at $49z/4 = 1$, slik at $z = 4/49$. Da blir $x = 36/49$, $y = 9/49$, slik at vi får eneste kandidat som $(36/49, 9/49, 4/49)$. Ved å bevege oss i planet $x + y + z = 1$ langt bort fra origo er det klart at vi kan finne så store verdier for f vi bare vil. f kan derfor ikke ha noe globalt maksimum. Hvis vi begrenser oss til punkter der $\|(x, y, z)\| \leq r$ så er det klart at vi kan velge r slik at f er vilkårlig stor utenfor dette området. Siden dette området er både lukket og begrenset så har det spesielt et minimum, og dette må da være et globalt minimum, siden verdiene utenfor $\|(x, y, z)\| \leq r$ kan antas å være større. Punktet vi har funnet må være dette globale minimumet.

Oppgave 3. I denne oppgaven skal vi finne volumet V til området avgrenset av paraboloiden $z = 6 - x^2 - y^2$ og kjeglen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Vis at

$$V = \int\int_D (6 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}) dxdy$$

(Fortsettes på side 3.)

der D er et område i xy-planet. Hvilket område er D?
Svar: I polarkoordinater er paraboloiden gitt ved $z = 6 - r^2$, og kjeglen $z = r$. Skjæringen mellom disse finner vi når $6 - r^2 = r$, som gir $r^2 + r - 6 = 0$, som gir $r = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1\pm 5}{2}$. Den eneste positive løsningen her er $r = 2$, slik at skjæringen er sirkelen $x^2 + y^2 = r^2 = 4$, og D er området innenfor denne sirkelen. I $(0,0)$ er det klart at paraboloiden tar verdien 6, mens kjeglen tar verdien 0, slik at paraboloiden ligger over kjeglen i det avgrensede området. Det følger at $V = \int\int_D (6 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2+y^2})dxdy$.

b) Regn ut V
Svar: I polarkoordinater blir integralet

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 (6 - r^2 - r)rdr\right]d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (6r - r^3 - r^2)drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[3r^2 - \frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{3}r^3\right]_0^2 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(12 - 4 - \frac{8}{3}\right)d\theta = 2\pi\frac{16}{3} = \frac{32\pi}{3}
\end{aligned}$$

Oppgave 4. La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 5 \\ 3 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Finn en maksimal mengde av lineært uavhengige søyler i A.
Svar: Nuller vi ut 3 elementer i første søyle får vi først

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 5 \\ 3 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Nuller vi ut elementene i tredje søyle får vi nå $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ slik at første og tredje søyle er pivotsøyler, og disse svarer da til de lineært uavhengige søylene.

b) Finn en vektor $\boldsymbol{b}_1$ slik at $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1$ ikke har noen løsning, og en annen vektor $\boldsymbol{b}_2$ slik at $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2$ har uendelig mange løsninger.
Svar: La C være trappematrisen vi endte opp med over. Med $\tilde{\boldsymbol{b}_1} = (0,0,0,1)$, så er det klart at $C\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{b}_1}$ ikke har noen løsning. Hvis vi gjør de inverse radoperasjonene over i motsatt rekkefølge vil vi få

$$\begin{pmatrix} C & \tilde{\boldsymbol{b}_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

(Fortsettes på side 4.)

siden siste søyle ikke ganges opp ellers legges til noen av de andre, og siden de andre elementene i siste søyle er 0 (som gjør at siste søyle ikke blir endret). Dermed kan vi velge $\boldsymbol{b}_1 = \tilde{\boldsymbol{b}_1} = (0,0,0,1)$.

Her kunne du mer generelt velge $\tilde{\boldsymbol{b}_1} = (a,b,c,d)$ med enten c eller $d \neq 0$. Uansett hva a,b,c,d måtte være, så lenge c eller $d \neq 0$, så vil vi (ved igjen å gjøre inverse radoperasjoner i motsatt rekkefølge) ende opp med en $\boldsymbol{b}_1$ slik at $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1$ ikke har noen løsning (Siste søyle blir en pivotsøyle uansett).

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1$ betyr at $\boldsymbol{b}_1$ er i søylerommet til A, slik at man også her kunne konstruere en $\boldsymbol{b}_1$ som ikke er i søylerommet til A. Søylerommet til A er her utspent av første og tredje søyle $((1,1,2,3)$ og $(2,3,7,8))$, og det er ikke vanskelig å finne en vektor som ikke kan skrives som en lineærkombinasjon av disse (feks. $(1,1,0,0)$).

Siden A har søyler som ikke er pivotsøyler så er den heller ikke inverterbar, og da vet vi at $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ har uendelig mange løsninger. Vi kan derfor velge $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$. Du kan også velge en vilkårlig $\tilde{\boldsymbol{b}_2}$ slik at $\begin{pmatrix} C & \tilde{\boldsymbol{b}_2} \end{pmatrix}$ ikke har pivotelement i siste søyle (feks. $\tilde{\boldsymbol{b}_2} = (0,1,0,0)$), og også her gjøre de inverse radoperasjonene i motsatt rekkefølge:

$$\begin{pmatrix} C & \tilde{\boldsymbol{b}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

som gir at systemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2$ med $\boldsymbol{b}_2 = (0,1,3,2)$ også har uendelig mange løsninger. Igjen, her kunne vi velge $\tilde{\boldsymbol{b}_2}$ på formen $(a,b,0,0)$ også. eller velge en vilkårlig $\boldsymbol{b}_2$ i søylerommet til A (feks. $\boldsymbol{b}_2$ lik en hvilken som helst søyle i A). Systemet har da alltid en løsning, og siden ikke alle søyler er piviotsøyler, så er det uendelig mange løsninger.

Oppgave 5.
Hva blir konvergensområdet for rekken $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n+1}$. Finn også et uttrykk for $S(x)$ der rekken konvergerer.
Svar: Forholdstesten gir at $|a_{n+1}/a_n| = |(x+1)(n+1)/(n+2)| \to |x+1|$, slik at rekken konvergerer i $(-2,0)$ (forholdstesten for $x=-1$ gir ikke mening på grunn av 0 i teller og nevner, men da er alle leddene 0, slik at rekken konvergerer også da). For $x=-2$ får vi rekka $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n/(n+1)$. Denne er alternerende, og absoluttverdiene av leddene er avtagende og går mot 0. Dermed blir rekken konvergent. For $x=0$ får vi rekka $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(n+1)$, som er divergent. Konvergensområdet blir derfor $[-2,0)$.
For å regne ut summen av rekka skriver vi først

$$(x+1)S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(x+1)^{n+1}/(n+1).$$

Deriverer vi denne får vi at

$$((x+1)S(x))' = \sum_{n=0}^{\infty}(x+1)^n = 1/(1-(x+1)) = -1/x.$$

(Fortsettes på side 5.)

Integrasjon gir så at $(x+1)S(x) = -\ln|x| + C$. Ved å sette inn $x = -1$ er det klart at $C = 0$, slik at $S(x) = -\ln|x|/(x+1)$, ihvertfall når $x \neq -1$ (det er klart at $S(-1) = 1$, og dette er grenseverdien for $-\ln|x|/(x+1)$ når $x \to -1$, siden summen av en rekke er kontinuerlig i konvergensområdet, i.e. Abels teorem). $-\ln|x|/(x+1)$ er også kontinuerlig for $x = -2$, slik at $S(x) = -\ln|x|/(x+1)$ også for $x = -2$ på grunn av Abels teorem.

Formelsamlingen på eksamen inkluderer en Taylorrekke som er veldig lik det vi har i denne oppgaven, så vi må kunne godta at studenten tar utgangspunkt i denne rekken.

Oppgave 6. I denne oppgaven skal vi se på funksjonen

$$f(x,y) = -x^2 + 3x - xe^y + y.$$

a) Finn de stasjonære punktene til f.
Svar: Gradienten til f er $(-2x+3-e^y, -xe^y+1)$. Skal begge komponentene her være 0 så følger det fra den andre likningen at $e^y = 1/x$. Setter vi dette inn i den første likningen får vi at $-2x+3-1/x = 0$, som gir at $-2x^2+3x-1 = 0$, slik at $2x^2-3x+1 = 0$, og $x = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}$, slik at $x = 1$ eller $x = 1/2$. Dette gir punktene $(1,0)$ og $(1/2, \ln 2)$.

b) Avgjør om de stasjonære punktene er sadelpunkter, lokale minimumspunkter, eller lokale maksimumspunkter.
Svar: Hessematrisen til f er $\begin{pmatrix} -2 & -e^y \\ -e^y & -xe^y \end{pmatrix}$.

For punktet $(1,0)$ blir Hessematrisen $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, som har determinant $2-1 = 1 > 0$. Siden $A = -2 < 0$ gir dette et lokalt maksimumspunkt.

For punktet $(1/2, \ln 2)$ blir Hessematrisen $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, som har determinant $2-4 = -2 < 0$, slik at vi her har et sadelpunkt.

Lykke til!