UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra
Eksamensdag:	Fredag 8. juni 2018
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen inneholder 10 deloppgaver som teller 6 poeng hver. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1. La $R > 0$ være et reelt tall.

a) Beregn dobbeltintegralet

$$\int\int_D x^2 e^{-x^3} \sin y \, dxdy$$

der D er området i $\mathbf{R}^2$ bestående av alle punkter (x, y) slik at $0 \leq x \leq R$ og $0 \leq y \leq \pi$.

b) La K_R være området i $\mathbf{R}^3$ bestående av alle punkter (x, y, z) slik at

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq R.$$

Beregn trippelintegralet

$$I_{K_R} = \int\int\int_{K_R} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dxdydz,$$

og finn

$$\lim_{R \to \infty} I_{K_R}.$$

Oppgave 2. La $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ være skalarfunksjonen definert ved

$$f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 24x - 10y + 61$$

a) Finn eventuelle stasjonære punkter til f, og avgjør om de er lokale minimumspunkter, lokale maksimumspunkter eller sadelpunkter.

(Fortsettes på side 2.)

b) Skisser kurven

$$4x^2 - 24x + 9y^2 - 90y + 225 = 0,$$

og la D være det lukkede området i $\mathbf{R}^2$ begrenset av denne kurven. Begrunn at f har et globalt maksimumspunkt og et globalt minimumspunkt på området D.

c) Bestem maksimumsverdien og minimumsverdien til f på D.

Oppgave 3.

a) Avgjør for hvilke reelle tall x rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n (n+5)!}{n!} (x-2)^n$$

konvergerer.

b) Bevis at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+3}}{4^{2n+3}(2n+1)!} = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{32}.$$

Oppgave 4. La A være matrisen gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 3/10 & 1/10 \\ 6/10 & 2/10 \end{pmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

b) La $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}$, og

$$\mathbf{x}_n = A^n \mathbf{x}_0 \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Finn $\mathbf{x}_n$ for $n \geq 0$, og vis at

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

c) Bevis at avbildningen $\mathbf{F} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definert ved $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ er en kontraksjon.

SLUTT