UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra
Eksamensdag:	Torsdag 16. august 2018
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg:	Formelsamling
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen inneholder 10 deloppgaver som teller 6 poeng hver. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1. La A være matrisen gitt ved $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 6 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

a) Finn den reduserte trappeformen til A.

b) Finn en basis for $\mathbf{R}^4$ som inneholder to av søylevektorene i A.

Oppgave 2.

a) Beregn dobbeltintegralet

$$\int\int_R x^2 \, dxdy$$

der R er området i $\mathbf{R}^2$ bestående av alle punkter (x, y) som er slik at $x^2 + y^2 \leq 1$ og $x \geq 0$.

b) La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet definert for alle $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ved

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 y, x^3 + \sin y),$$

og la C være kurven parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$$

for $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. Beregn kurveintegralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Begrunn at kurven gitt ved likningen

$$x^2 + 4y^2 + 10x - 8y + 25 = 0$$

er en ellipse i (x, y)-planet, og finn brennpunktene. Skisser kurven.

Oppgave 4. La $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ være definert ved $f(x, y, z) = x - y + z$. Finn maksimumsverdien og minimumsverdien til f på flaten gitt ved

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Oppgave 5. Finn en (2×2)-matrise A slik at $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for A med egenverdi 1.

Oppgave 6

a) Avgjør om rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \sin^3 n}{n^4 - \ln n}$$

konvergerer eller divergerer.

b) Avgjør for hvilke relle tall x potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \sin^3 n}{n^4 - \ln n}(x-2)^{2n}$$

konvergerer.

Oppgave 7. La D være området i $\mathbf{R}^3$ avgrenset av flaten $x^2 + y^2 = 1$ og de to planene $z = 0$ og $z = t$, der $t > 0$. La $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ være definert ved

$$f(t) = \int\int\int_D (2z - z^2)e^{z^2} \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz.$$

Vis at f har et globalt maksimumspunkt, og bestem dette. (Den tilhørende maksimumsverdien trenger ikke beregnes.)

SLUTT