UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra
Eksamensdag:	Lørdag 17. mars 2018 (prøveeksamen)
Tid for eksamen:	10.00 – 14.00

Oppgavesettet er på 7 sider.

Vedlegg:	Svarark, formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Dette settet har 25 oppgaver, mens midtveis eksamen torsdag 22. mars 2018 har 15 oppgaver. Om du svarer galt eller lar være å svare på en oppgave, får du 0 poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Krysser du av mer enn ett alternativ på en oppgave, får du 0 poeng.

Oppgave 1. Hvilken matrise er på trappeform?

A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
B) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
C) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
E) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Oppgave 2. La C være sirkelen $x^2 + (y+1)^2 = 4$ i xy-planet. Hvilken funksjon $\mathbf{r}$ er en parametrisering av C i retning mot klokken?

A) $\mathbf{r}(t) = (2\sin t)\mathbf{i} + (2\cos t - 1)\mathbf{j}$ for $t \in [0, 2\pi)$
B) $\mathbf{r}(t) = (2\cos^2 t)\mathbf{i} + 2\sin^2(t-1)\mathbf{j}$ for $t \in [0, 2\pi)$
C) $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t+1)^2\mathbf{j}$ for $t \in [0, 2\pi)$
D) $\mathbf{r}(t) = -t^2\mathbf{i} + (t+1)^2\mathbf{j}$ for $t \in [0, 2\pi)$
E) $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (2\sin t - 1)\mathbf{j}$ for $t \in [0, 2\pi)$

Oppgave 3. La $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ være gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + 4y \\ 3x + 5y \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{G}(x,y) = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ x^2 + y \end{pmatrix},$$

(Fortsettes på side 2.)

og la $\mathbf{H}(x, y) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(x, y))$ for alle $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Da er:

A) $\mathbf{H}'(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

B) $\mathbf{H}'(1,1) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$

C) $\mathbf{H}'(1,1) = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 13 & 11 \end{pmatrix}$

D) $\mathbf{H}'(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

E) $\mathbf{H}'(1,1) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Oppgave 4. La $\mathbf{T} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ være en lineæravbildning slik at

$$\mathbf{T}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{T}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hva er matrisen til T?

A) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

Oppgave 5. La $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Hvilken påstand er sann?

A) Den reduserte trappeformen til A har nøyaktig 2 pivotsøyler.
B) Likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har uendelig mange løsninger.
C) Den reduserte trappeformen til A har determinant 0.
D) Den reduserte trappeformen til A er lik A.
E) A er radekvivalent med identitetsmatrisen av størrelse 3×3.

Oppgave 6. La $k > 1$ være et reelt tall. Hvilken av disse matrisene har komplekse egenverdier?

A) $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & k \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 1 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 7. Hvilken av disse skalarfunksjonene er en potensialfunksjon for vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y) = e^{x+2y}\mathbf{i} + 2e^{x+2y}\mathbf{j}$:

A) $g(x,y) = e^{x+2y} + 2e^{x+2y}$
B) $g(x,y) = xe^{x} + 2ye^{2y}$
C) $g(x,y) = \ln(x+2y)$
D) $g(x,y) = e^{x+2y}$
E) $g(x,y) = |\ln(e^{x+2y})|$

Oppgave 8. La C være en enkel, lukket kurve i $\mathbf{R}^2$ med en stykkevis glatt parametrisering $\vec{r}$ i retning mot klokken, la R være området avgrenset av C, og la $\mathbf{F} = (P,Q)$ være et vektorfelt slik at de partielle deriverte av komponentfunksjonene P og Q til $\mathbf{F}$ er kontinuerlige i et åpent område som inneholder R og C. Hvilket utsagn er sant?

A) Arealet til R er $\int\int_R \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$.
B) Arealet til R er $-\int\int_R \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$.
C) Arealet til R er $-\int_C Pdx$.
D) Arealet til R er $\int_C x\, dy$.
E) Arealet til R er $-\int_C y\, dy$.

Oppgave 9. En kurve er parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = (1+\sin t)\mathbf{i} + (1+\cos t)\mathbf{j}$. Akselerasjonvektoren $\mathbf{a}(t)$ er da

A) $(-\sin t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j}$
B) $(\sin t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j}$
C) $(-\sin t)\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$
D) $(\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j}$
E) $(1+\cos t)\mathbf{i} + (1-\sin t)\mathbf{j}$

Oppgave 10. La C være kurven i $\mathbf{R}^2$ parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = (\sin 2t, \cos 2t)$ for $t \in [0,\pi]$, og la $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y) = (x+y)\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j}.$$

Da er linjeintegralet $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ lik:

A) 0
B) 2
C) π
D) $-pi$
E) $\pi/2$

Oppgave 11. La R være området i $\mathbf{R}^2$ bestående av alle punkter (x,y) slik at de tre kravene $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$, $x \geq 0$ og $y \geq 0$ alle er oppfylt. Dobbeltintegralet

$$\int\int_R \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} dxdy$$

blir da lik:

(Fortsettes på side 4.)

A) $\int_0^{\pi/2}(\int_1^2 \frac{\cos\theta}{r^2}dr)d\theta$
B) $\int_0^{\pi/2}(\int_1^2 \frac{\cos\theta}{r}dr)d\theta$
C) $\int_0^{\pi}(\int_1^2 r dr)d\theta$
D) $\int_0^{\pi}(\int_0^2 \frac{\cos\theta}{r}dr)d\theta$
E) $\int_0^{2\pi}(\int_1^2 \frac{\sin\theta}{r^3}dr)d\theta$

Oppgave 12. Hvilket kjeglesnitt beskriver likningen

$$16x^2 - 4y^2 + 32x - 4y - 1 = 0 \quad ?$$

A) En hyperbel med sentrum i $(-1, 1/2)$
B) En hyperbel med sentrum i $(-1, -1/2)$
C) En ellipse med halvakser 4 og 2
D) En ellipse med halvakser 16 og 4
E) En parabel

Oppgave 13. Hvilken av disse vektorene er *ikke* en lineærkombinasjon av vektorene $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

A) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Oppgave 14. La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet i $\mathbf{R}^2$ gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = (2x + y)\mathbf{i} + (2y + x)\mathbf{j},$$

og la $\mathbf{r}$ være en glatt parametrisering av sirkelen C med likning $x^2 + y^2 = 1$ orientert mot klokken. Hvilket utsagn er sant:

(Fortsettes på side 5.)

A) $\mathbf{F}$ har ingen potensialfunksjon definert på hele $\mathbf{R}^2$
B) $\mathbf{F}$ er konservativt på hele $\mathbf{R}^2$
C) Vi har $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \pi$
D) Vi har $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$
E) Vi har $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -2\pi$

Oppgave 15. La $M = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hvilket utsagn er sant?

A) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for M
B) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for M
C) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for M
D) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for M
E) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for M

Oppgave 16. En nivåkurve for funksjonen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ gitt ved

$$f(x, y) = 1 + 2x + x^2 + 4y^2$$

er:

A) En sirkel
B) Enten en hyperbel eller et punkt
C) En parabel
D) En rett linje
E) Enten en ellipse eller et punkt

Oppgave 17. La R være området bestående av alle punkter $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ slik at $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. Da er dobbeltintegralet $\int\int_R x^3 dxdy$:

A) $\pi/3$
B) π
C) $\pi/2$
D) 0
E) $-\pi$

Oppgave 18. Hvilket utsagn er sant?

A) Mengden av alle punkter $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ som ligger like langt fra $(0, 0)$ som fra $(0, 2\pi)$ er en ellipse
B) Mengden av alle punkter $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ som ligger like langt fra $(0, 0)$ som

(Fortsettes på side 6.)

fra linjen $y = 5 - x$ er en ellipse
C) Mengden av alle punkter $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ som ligger like langt fra $(0, 0)$ som fra linjen $y = 5 - x$ er en parabel
D) Mengden av alle punkter $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ som ligger like langt fra $(0, 0)$ som fra $(0, 2\pi)$ er en parabel
E) Mengden av alle punkter $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ som ligger i avstand $\sqrt{2}$ fra kurven $x^2 - y^2 = 1$ er en hyperbel

Oppgave 19. La $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ være definert ved

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-3)^5 + 1 \\ y^5 z^5 \end{pmatrix}$$

Da er lineariseringen $\mathbf{L}$ til $\mathbf{F}$ i punktet $(3, 0, 0)$:

A) $\mathbf{L}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

B) $\mathbf{L}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-3 \\ y \\ z \end{pmatrix}$

C) $\mathbf{L}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

D) $\mathbf{L}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-3 \\ y \\ z \end{pmatrix}$

E) $\mathbf{L}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Oppgave 20. Gitt det uegentlige integralet

$$\int\int_{\mathbf{R}^2} x^2 e^{(y^2)}\, dxdy.$$

Hvilket utsagn om dette integralet er sant:

A) Integralet divergerer
B) Integralet er lik 0
C) Integralet er lik -1
D) Integralet er lik 1
E) Integralet er lik 2π

Oppgave 21. Hvilket utsagn er sant for alle kvadratiske matriser A?

A) $\det(A^n) = n \cdot \det(A)$ for alle naturlige tall n
B) $\det(A^n) = (\det A)^n$ for alle naturlige tall n
C) $\det(kA) = k \cdot \det(A)$ for alle reelle tall k
D) $\det(-A) = -\det(A)$
E) $\det(A^{-1}) = -\det(A)$

(Fortsettes på side 7.)

Oppgave 22. Egenverdiene til matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ er:

A) 3, 1 og 7
B) -1, 0 og 2
C) 8 og 1
D) 1, -4 og 4
E) 1, 7 og 0

Oppgave 23. La R være området bestående av alle punkter $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ slik at $4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$. Da er trippelintegralet $\int\int\int_R 1\, dxdydz$:

A) $35\pi/2$
B) $76\pi/3$
C) $35/2$
D) π^3
E) $2\pi^2$

Oppgave 24. Tangentplanet til grafen til funksjonen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ gitt ved $f(x, y) = (x + 1)^2 + y^2$ i punktet $(0, 1, 2)$ har likning:

A) $z = 2x + 2y$
B) $z = 1 + 2x + 2y$
C) $z = 1 + 2x + 2(y - 1)$
D) $z = 2x + 2(y - 1)$
E) $z = 2(x + 1) + 2y$

Oppgave 25. La $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ og $\mathbf{G} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, og la $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være gitt ved

$$h(t) = f(\mathbf{G}(t)).$$

Vi skriver punktene i $\mathbf{R}^2$ som (x, y) og lar $\mathbf{G}(t) = (G_x(t), G_y(t))$. Da er

A) $h'(t) = f(G'_x(t) + G'_y(t))$
B) $h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{G}'(t)) \cdot \frac{dG_x}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{G}'(t)) \cdot \frac{dG_y}{dt}$
C) $h'(t) = G'_x(t) + G'_y(t)$
D) $h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{G}(t)) \cdot G'_x(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{G}(t)) \cdot G'_y(t)$
E) $h'(t) = f(\mathbf{G}'(t)) \cdot f'(\mathbf{G}(t))$

SLUTT