Fasit/løsningsskisse midtveis Mat 1110 vår 2018

NB: Denne fasiten refererer til rekkefølgen A–E av alternativene i pdf-versjonen av oppgavesettet. Selve eksamen var elektronisk, og alternativene var der randomisert individuelt for hver kandidat.

1

$$\vec{r}(t) = t^3\,\vec{i} + e^{-2t}\,\vec{j}$$

$$\vec{r}\,'(t) = 3t^2\,\vec{i} + (-2)e^{-2t}\,\vec{j}$$

$$\vec{r}\,''(t) = 6t\,\vec{i} + 4e^{-2t}\,\vec{j}$$

$$\vec{r}\,''(1) = \vec{a}(1) = 6\,\vec{i} + 4e^{-2\cdot 1}\,\vec{j} = 6\,\vec{i} + 4e^{-2}\,\vec{j}$$

E

2

$$\vec{L}(x,y) = \vec{F}(1,1) + \vec{F}\,'(1,1)\cdot\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

Vi har $\vec{F}(1,1) = \begin{pmatrix} 1^2+3 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\vec{F}\,'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial x} & \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \vec{F}_2}{\partial x} & \frac{\partial \vec{F}_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$$

Altså

$$\vec{L}(\vec{x},y) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

B

3 Her kan vi prøve oss frem. Prøver alternativ B:

Kravet $\begin{pmatrix} -2 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix} = a\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ gir $\begin{cases} a = -2 \\ a + 2b = 15 \\ a = -2 \end{cases}$

Her kan vi ta $b = 17/2$.

B

4

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 16 & 3 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{II - 2\cdot I \\ III + I}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 12 & 2 \end{pmatrix} \overset{III + 2\cdot II}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fra dette ser vi at trappeformen til A har nøyaktig 2 pivotsøyler. D

5

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{gir} \quad \begin{cases} 7x - 2y = \lambda x \\ 4x + y = \lambda y \end{cases}$$

$$\text{dvs.} \quad \begin{cases} (7-\lambda)x - 2y = 0 \\ 4x + (1-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

Her får vi ikke-trivielle løsninger hvis determinanten er 0, altså

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(1-\lambda) + 8 = \lambda^2 - 8\lambda + 7 + 8$$

$$= \lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0,$$

$$\text{dvs.} \quad \lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4\cdot 15}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$$

D

6

$$f(x,y,z) = z \cdot \sin(xy) \quad \text{gir}$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(z\cdot\cos(xy)\cdot y,\ z\cdot\cos(xy)\cdot x,\ \sin(xy)\right)$$

$$= \vec{F}(x,y,z).$$

C

7

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 (t, t^2, t^3)\cdot(1, 2t, 3t^2)\,dt$$

$$= \int_0^1 (t + 2t^3 + 3t^5)\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{4}t^4 + \frac{3}{6}t^6\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

D

8 Riktig alternativ : D

9 $4x^2 + y^2 + 24x - 4y + 24 = 0$ gir

$$4(x^2+6x) + (y^2-4y) = -24$$
$$4(x^2+6x+9) + (y^2-4y+4) = -24 + 36 + 4$$
$$4(x+3)^2 + (y-2)^2 = 16$$
$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$
$$\frac{(x-(-3))^2}{2^2} + \frac{(y-2)^2}{4^2} = 1$$

A

10 Som i oppgave 5 finner vi egenverdiene ved å sette determinanten til matrisen med λ fratrukket nedover diagonalen lik 0.
Alternativ D gir da

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & a \\ 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot(6-\lambda) - 0 = 0,$$

som har løsninger $\lambda = 1$ og $\lambda = 6$.

D

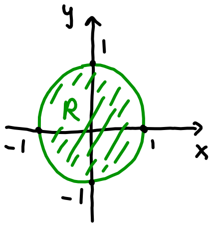
11 Vi har

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Så $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ med egenverdi 3.

C

12



Beskrivelse av R i polarkoordinater : $(J = 1)$

$$\begin{cases} r \in [0, 1] \\ \theta \in [0, 2\pi) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Så $$\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 r^2 \cdot |J|\, dr\right] d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 r^3\, dr\right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} r^4\right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\, d\theta = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

C

(13) Vi bruker polarkoordinater:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \left[\int_0^{2\pi} r^2 e^{-r^4} \cdot r\,d\theta\right] dr$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^R 2\pi r^3 e^{-r^4}\,dr = 2\pi \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{4}e^{-r^4}\right]_0^R$$

$$= 2\pi \cdot \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{4}\underbrace{e^{-R^4}}_{\to 0} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{\pi}{2}$$

(C)

(14)

$$\iiint_R xy^2\,dx\,dy\,dz = \int_0^2\left[\int_0^2\left[\int_0^2 xy^2\,dz\right]dy\right]dx = \int_0^2\left[\int_0^2 2xy^2\,dy\right]dx$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{2}{3}xy^3\right]_{y=0}^{y=2} dx = \int_0^2 \frac{16}{3}x\,dx = \left[\frac{16}{6}x^2\right]_0^2 = \frac{32}{3}$$

(D)

(15) C er en sirkel med radius 1, orientert mot klokken.

Greens teorem gir da

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy \quad \text{der} \quad \begin{cases} P(x,y) = y + \sin(x^2) \\ Q(x,y) = -5x - \cos(y^2) \end{cases}$$

$$= \iint_R (-5-1)\,dx\,dy$$

$$= (-6)\cdot \text{areal}(R),$$

der R er området avgrenset av kurven C.

Men R er en sirkelskive med radius 1, så areal$(R) = \pi$.

Ergo $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = -6\pi$

(E)