Omvendt funksjonsteorem: Hvis $U \subset \mathbb{R}^m$, $\bar{F}: U \to \mathbb{R}^m$; $\bar{F}(\bar{x}_0) = \bar{y}_0$ og det $\bar{F}'(\bar{x}_0) \neq 0$, så har $\bar{F}$ en omvendt funksjon $\bar{G}$ nær $\bar{y}_0$ og $\bar{G}'(y_0) = \bar{F}'(x_0)^{-1}$.

5.7.1 $\bar{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y+1 \\ x-y-2 \end{pmatrix}$, $\bar{F}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\bar{F}' = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\bar{F}'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, det $\bar{F}'(0,0) = -1$

$\Rightarrow \bar{F}$ har omvendt funksjon $\bar{G}$ nær $(1,-2)$ slik at $\bar{G}(1,-2) = (0,0)$

$\bar{G}'(1,-2) = \bar{F}'(0,0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}}$

(Merk! $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$)

$\bar{F}(-1,-1) = \begin{pmatrix} 1-1+1 \\ -1+1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. $\bar{F}'(-1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

det $\bar{F}'(-1,-1) = 2-1 = 1$

$\Rightarrow \bar{F}$ har omvendt funksjon $\bar{H}$ nær $(1,-2)$ slik at $\bar{H}(1,-2) = (-1,-1)$

$\bar{H}'(1,-2) = \bar{F}'(-1,-1)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}}$

5.7.2 $F(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y^2-1} \\ x-y \end{pmatrix}$, $F(0,1) = \begin{pmatrix} e^{0+1-1} \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\bar{F}' = \begin{pmatrix} e^{x+y^2-1} & 2ye^{x+y^2-1} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\bar{F}'(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, det $\bar{F}'(0,1) = -3$

$\Rightarrow \bar{F}$ har omvendt funksjon $\bar{G}$ nær $(1,-1)$ slik at $\bar{G}(1,-1) = (0,1)$

$$\bar{G}'(1,-1) = \bar{F}'(0,1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}}$$

$$\bar{F}(-3,-2) = \begin{pmatrix} e^{-3+4-1} \\ -3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{F}'(-3,-2) = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

det $\bar{F}'(-3,-2) = 3 \Rightarrow \bar{F}$ har omvendt funksjon $\bar{H}$ nær $(1,-1)$ slik at $\bar{H}(1,-1) = (-3,-2)$.

$$\bar{H}'(1,-1) = \bar{F}'(-3,-2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}}$$

- Implisitt funksjonsteorem: Hvis $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}$ er åpne, $f(\bar{x},y): U \times V \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}_0, y_0) = c$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}_0, y) \neq 0$, så fins entydig funksjon $y(\bar{x})$ nær $\bar{x}_0$ slik at $f(\bar{x}, y(x)) = c$. Videre er $\frac{\partial y}{\partial x_i}(\bar{x}_0) = -\frac{\partial f/\partial x_i(\bar{x}_0, y_0)}{\partial f/\partial y(\bar{x}_0, y_0)}$

Kortere sagt: Vi kan derivere ligningen $f(\bar{x},y) = c$ implisitt m.h.p. alle x_i:

$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_i} = 0$. Kan løse $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ når $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$.

5.7.3 Nær ethvert punkt på kurven $g = x^3 + y^3 + y = 1$ kan vi løse y som funksjon av x.

Bevis: $\frac{\partial g}{\partial y} = 3y^2 + 1 > 0$ for alle y. Vi deriverer implisitt

m.h.p. x: $3x^2 + (3y^2+1)\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = \underline{\underline{\frac{-3x^2}{3y^2+1}}}$

4) $f(x,y,z) = xy^2e^z + z$

$f(-1,2,0) = (-1)4 \cdot e^0 + 0 = -4$

$\frac{\partial f}{\partial z} = xy^2e^z + 1$, $\frac{\partial f}{\partial z}(-1,2,0) = -4+1 = -3 \neq 0$

$\Rightarrow$ Kan löse ligningen $f(x,y,z) = -4$ for z nær $(-1,2)$ slik at

$z(-1,2) = 0$.

Deriverer m.h.p. x:

$y^2e^z + xy^2e^z\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y^2e^z}{(xy^2e^z+1)}$, $\frac{\partial z}{\partial x}(-1,2) = \frac{-4\cdot 1}{-3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$.

M.h.p. y:

$2xye^z + (xy^2e^z+1)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2xye^z}{(xy^2e^z+1)}$; $\frac{\partial z}{\partial y}(-1,2) = \frac{-2(-1)2}{-3} = \underline{\underline{-\frac{4}{3}}}$.

<u>5.7.5</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

a) Finn A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2R_1 \\ -R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot -\frac{1}{3} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} -R_3 \\ +R_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right), \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}}$$

b) $\bar{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+z \\ x^2+\frac{1}{2}y^2+z \\ x+z^2 \end{pmatrix}$, $\bar{F}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2x & y & 1 \\ 1 & 0 & 2z \end{pmatrix}$

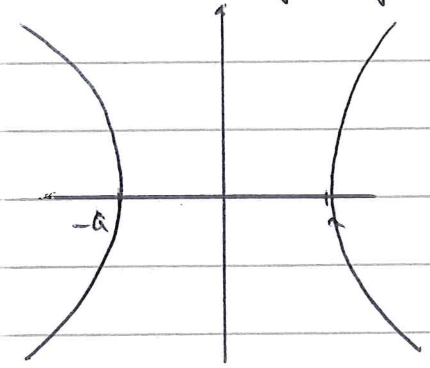
$\bar{F}(1,1,-1) = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1+\frac{1}{2}-1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\bar{F}'(1,1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = A$$

$\Rightarrow$ $\bar{F}$ har omvendt funksjon $\bar{G}$ nær $(0,\tfrac{1}{2},2)$ slik at
$\bar{G}(0,\tfrac{1}{2},2) = (1,1,-1)$.

$$\bar{G}'(0,\tfrac{1}{2},2) = \bar{F}'(1,1,-1)^{-1} = A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5.7.7. Stigningstallet til hyperbelen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y \neq 0$.



Deriverer implisitt m.h.p. x:

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}.$$

5.7.9 Dette er bare kjerneregelen:

$$\phi(x,y(x)) = C \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y(x))\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial\phi/\partial x(x,y(x))}{\partial\phi/\partial y(x,y(x))}.$$

5.7.10 $z(x,y)$ oppfyller $x + y^2 + z^3 = 3xyz$.

Deriverer implisitt

$$1 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} = 3yz + 3xy\frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3yz-1}{3(z^2-xy)}$$ (Når nevner $\neq 0$)

$$2y + 3z^2\frac{\partial z}{\partial y} = 3xz + 3xy\frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3xz}{3(z^2-xy)}$$

5.7.11. $z(x,y)$ oppfyller $2x^2+3y^2+z^2=e^{-z}$.
Deriverer implisitt
$$4x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-z}\cdot-\frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-4x}{2z+e^{-z}} \quad \text{når } 2z+e^{-z}\neq 0.$$
$$6y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-z}\cdot-\frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-6y}{2z+e^{-z}}.$$

- Ekstremverdisetningen: En kontinuerlig funksjon på en lukket og begrenset mengde har både maks og min.

5.8.1 Hvis $A\subset\mathbb{R}^m$ er lukket og begrenset og $\bar{F}:A\to\mathbb{R}^k$ er kontinuerlig, så fins tall K slik at $|\bar{F}(\bar{x})|\leq K$ for alle $\bar{x}\in A$.
Bevis: Vi har $\bar{F}=(F_1,\dots,F_k)$, der alle F_i er kontinuerlige funksjoner. Ekstremverdisetningen gir at hver F_i har maks og min: $m_i\leq F_i(\bar{x})\leq M_i$ for alle $\bar{x}\in A$. Dette gir $|F_i(\bar{x})|\leq\max\{|m_i|,|M_i|\}=:K_i$. Dermed er
$$|\bar{F}(\bar{x})|=\sqrt{|F_1(\bar{x})|^2+\dots+|F_k(\bar{x})|^2}\leq\sqrt{K_1^2+\dots+K_k^2}=:K.$$

5.8.3. $A\subset\mathbb{R}^m$ er lukket og begrenset og $\bar{F}:A\to A$ er kontinuerlig.
(a) $f(\bar{x})=|\bar{x}-\bar{F}(\bar{x})|$ er kontinuerlig siden $\bar{G}(\bar{x})=\bar{x}-\bar{F}(\bar{x})$ er kontinuerlig og $|\ |:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ er kontinuerlig.
Ekstremverdisetningen gir da at f har et minimumspunkt.

(b) Hvis $|\bar{F}(\bar{x})-\bar{F}(\bar{y})|<|\bar{x}-\bar{y}|$ når $\bar{x}\neq\bar{y}$, så har $\bar{F}$ et entydig fikspunkt.
Bevis: Vi vet at $f(\bar{x})=|\bar{x}-\bar{F}(\bar{x})|$ har et minimumspunkt $\bar{x}$. Påstår at $\bar{F}(\bar{x})=\bar{x}$. Hvis ikke, sett $\bar{y}=\bar{F}(\bar{x})$. Da har vi
$$f(\bar{y})=|\bar{y}-\bar{F}(\bar{y})|=|\bar{F}(\bar{x})-\bar{F}(\bar{y})|<|\bar{x}-\bar{y}|=|\bar{x}-\bar{F}(\bar{x})|=f(\bar{x}),$$
som strider mot at $\bar{x}$ er minimumspunkt.

Entydighet: Hvis $\bar{F}(\bar{x}) = \bar{x}$, $\bar{F}(\bar{y}) = \bar{y}$ og $\bar{x} \neq \bar{y}$, så er $|\bar{x}-\bar{y}| = |\bar{F}(\bar{x}) - \bar{F}(\bar{y})| < |\bar{x}-\bar{y}|$, som er umulig.

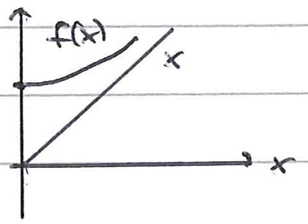
c) Hvis vi dropper betingelsen om at A er lukket og begrenset, så behöver ikke $\bar{F}$ ha et fikspunkt.

Eksempel 1. A ikke lukket (men begrenset)

$$f(x) = \frac{1}{2}x, \quad A = (0,1).$$

Eksempel 2 A ikke begrenset (men lukket)

$$f(x) = x + \frac{1}{x+1} \qquad A = [0, \infty)$$



Geometrisk opplagt at $|f(x) - f(y)| < |x-y|$.

Formell bevis:

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{(t+1)^2} < 1.$$

Anta $x \neq y$.

Middelverdisetningen gir at det fins t mellom x og y

slik at $|f(x) - f(y)| = |f'(t)(x-y)| < |x-y|$.

- Stasjonært punkt for $f(x,y)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$

- Annenderiverttesten i stasjonært punkt (x,y):

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$

$D = AC - B^2$ (Hesse-determinanten)

$D > 0$, $A > 0$: Lokalt min

$D > 0$, $A < 0$: Lokalt maks

$D < 0$: Sadelpunkt

$D = 0$: Ingen konklusjon. Alt er mulig.

5.9.2 Finn stasjonære punkter og bestem deres type.

a) $f = x^2 + y^2 - 2x + 4y$

$\partial f/\partial x = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ Stasjonært punkt $(1,-2)$

$\partial f/\partial y = 2y + 4 = 0 \Rightarrow y = -2$

$\partial^2 f/\partial x^2 = 2 \Rightarrow A = 2$

$\partial^2 f/\partial x \partial y = 0 \Rightarrow B = 0$ $\Rightarrow D = AC - B^2 = 4 > 0$, $A > 0$ } Lokalt min i $(1,-2)$

$\partial^2 f/\partial y^2 = 2 \Rightarrow C = 2$

Vi ser at

$f = (x-1)^2 + (y+2)^2 - 5$. Det følger at $(1,-2)$ er globalt min

c) $f = e^{x^2+3y^2}$

$\partial f/\partial x = e^{x^2+3y^2} \cdot 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ Stasjonært punkt $(0,0)$

$\partial f/\partial y = e^{x^2+3y^2} \cdot 6y = 0 \Rightarrow y = 0$

$\partial^2 f/\partial x^2 = e^{x^2+3y^2} \cdot 2x \cdot 2x + e^{x^2+3y^2} \cdot 2 \Rightarrow A = 2$

$\partial^2 f/\partial x \partial y = e^{x^2+3y^2} \cdot 6y \cdot 2x \Rightarrow B = 0$

$\partial^2 f/\partial y^2 = e^{x^2+3y^2} \cdot 6y \cdot 6y + e^{x^2+3y^2} \cdot 6 \Rightarrow C = 6$

$D = 12 > 0$, $A = 2 > 0$, $(0,0)$ lokalt min

Ser lett at $(0,0)$ er globalt min, ellers er $x^2 + 3y^2 > 0$.

5.9.8. $f = 2x^2y + 4xy - y^2$

a) Stasjonære punkter

(I) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 4y = 4y(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$ eller $y = 0$

(II) $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 4x - 2y = 0 \Rightarrow y = x^2 + 2x$

$x = -1$: II gir $y = 1 - 2 = -1$

$y = 0$: II gir $x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ eller $x = -2$

Stasjonære punkter

$(-1,-1)$, $(0,0)$ og $(-2,0)$.

b) Bestem deres type

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4x+4$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$

$D = AC - B^2 = -8y - (4x+4)^2$

$D(-1,-1) = 8 - 0 = 8$, $A(-1,-1) = -4$ Lokalt maks

$D(0,0) = -16$ Sadelpunkt

$D(-2,0) = -(-4)^2 = -16$ Sadelpunkt.

5.9.9 $f = (x^2 + y^2)e^x$

a) Stasjonære punkter

(I) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x e^x + (x^2+y^2)e^x = e^x(x^2+2x+y^2) = 0$

(II) $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y e^x = 0 \Rightarrow y = 0$.

(I) gir da $x^2 + 2x = 0$, dvs $x = 0 \lor x = -2$

Stasjonære punkter

$(0,0)$ og $(-2,0)$

b) Bestem deres type

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x(x^2+2x+y^2) + e^x(2x+2)$

$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y e^x$

$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^x$

$A(0,0) = 2$, $B(0,0) = 0$, $C(0,0) = 2$, $D = AC - B^2 = 4$, $A > 0$ Lokalt min.

$A(-2,0) = -2$, $B(-2,0) = 0$, $C(-2,0) = 2e^{-2}$, $D = -4e^{-2} < 0$ Sadelpunkt.

5.9.10. $f = (x^2 - y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

a) Finn stasjonære punkter og bestem deres type.

(I) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + (x^2-y^2)\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot (-x) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(2x - x^3 + xy^2)$

$= e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} x(2 - x^2 + y^2) = 0$

(II) $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + (x^2-y^2) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot (-y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (-2y - yx^2 + y^3)$

$= e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} y(-2 - x^2 + y^2) = 0$

(I) gir $x = 0$ eller $y^2 = x^2 - 2$

$x = 0$: (II) gir $y(y^2 - 2) = 0$, dvs. $y = 0$, $y = \pm\sqrt{2}$

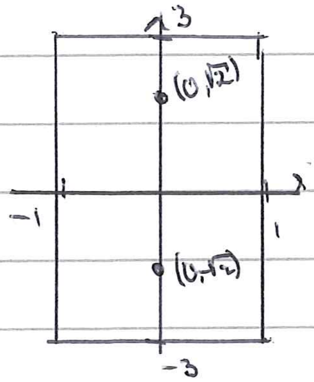
$y^2 = x^2 - 2$: (II) gir $y\cdot(-2 - x^2 + x^2 - 2) = y\cdot(-4) = 0$, dvs. $y = 0$

og $x^2 - 2 = 0$, dvs $x = \pm\sqrt{2}$

Stasjonære punkter: $(0,0)$, $(0, \pm\sqrt{2})$, $(\pm\sqrt{2}, 0)$

	$(0,0)$	$(0,\pm\sqrt{2})$	$(\pm\sqrt{2},0)$
$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (-x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(2x - x^3 + xy^2) + e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(2 - 3x^2 + y^2)$	2	$4e^{-1}$	$-4e^{-1}$
$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (-y)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(2x - x^3 + xy^2) + e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot 2xy$	0	0	0
$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (-y)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(-2y - yx^2 + y^3) + e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(-2 - x^2 + 3y^2)$	-2	$4e^{-1}$	$-4e^{-1}$
$D = AC - B^2$	-4	$16e^{-2}$	$16e^{-2}$
Type	Sadelpunkt	Lokalt min	Lokalt maks.

b) Maks og min av f på området $|x| \leq 1$, $|y| \leq 3$



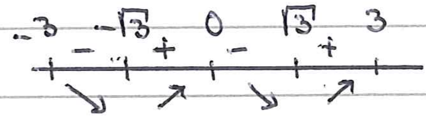
f har maks og min i følge ekstremverdisetningen. Disse er enten indre lokale maks og min eller på kanten.

Indre punkter: Lokale min i $(0, \pm\sqrt{2})$

$$f(0, \pm\sqrt{2}) = -2e^{-1} = -\frac{2}{e}$$

Vertikale kanter: $f(\pm 1, y) = (1-y^2)e^{-\frac{1+y^2}{2}}$

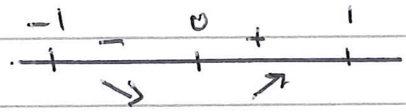
$$\frac{\partial f}{\partial y}(\pm 1, y) = e^{-\frac{1+y^2}{2}} \cdot y(y^2-3)$$



$f(\pm 1, \pm 3) = -8e^{-5}$, $f(\pm 1, \pm\sqrt{3}) = -2e^{-2}$, $f(\pm 1, 0) = e^{-\frac{1}{2}}$

Horisontale kanter: $f(x, \pm 3) = (x^2-9)e^{-\frac{x^2+9}{2}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \pm 3) = e^{-\frac{x^2+9}{2}} x(11-x^2)$$

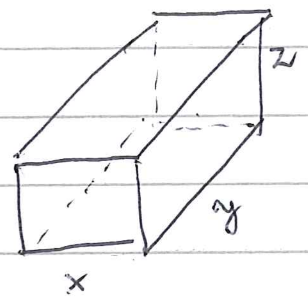


$f(0, \pm 3) = -9e^{-\frac{9}{2}}$.

$f_{min} = -\frac{2}{e}$ i punktene $(0, \pm\sqrt{2})$

$f_{maks} = e^{-\frac{1}{2}}$ i punktene $(\pm 1, 0)$.

5.9.11



Volum $V = xyz$

Areal $A = xy + 2xz + 2yz$

$$= xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}$$

Det er klart at $A \to \infty$ når $x \to 0, y \to 0$ eller $xy \to \infty$. Altså må A ha et minimum i $\{(x,y);\ x>0,\ y>0\}$ og det må være et stasjonært punkt.

$$\frac{\partial A}{\partial x} = y - \frac{2V}{x^2} = 0 \implies y = \frac{2V}{x^2}$$

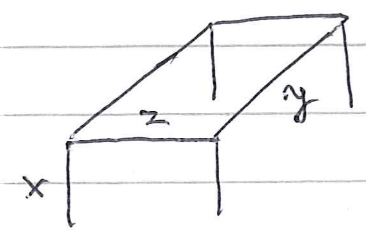
$$\frac{\partial A}{\partial y} = x - \frac{2V}{y^2} = 0 \implies x = \frac{2V}{y^2}$$

Dette gir

$$x = \frac{2V}{y^2} = \frac{2V}{\left(\frac{2V}{x^2}\right)^2} = \frac{x^4}{2V} \implies x^3 = 2V, \quad \underline{\underline{x = \sqrt[3]{2V}}}$$

$$y = \frac{2V}{(2V)^{2/3}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{2V}}}, \quad z = \frac{V}{xy} = \frac{V}{(2V)^{2/3}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{\frac{V}{4}}}}$$

5.9.12



Volum $V = xyz = 500$

Lengde

$$L = 4x + 2y + 2z = 4x + 2y + \frac{1000}{xy}$$

Som i 5.9.11 ser vi at L har et globalt minimum for $x>0, y>0$.

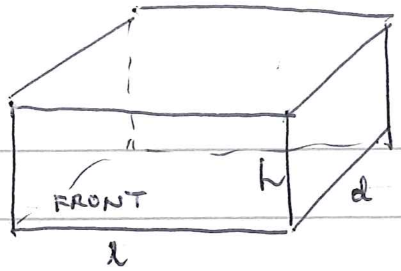
$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4 - \frac{1000}{x^2 y} = 0 \implies x^2 y = 250, \quad y = 250/x^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2 - \frac{1000}{xy^2} = 0 \implies xy^2 = 500, \quad x = 500/y^2.$$ Dette gir

$$x = \frac{500}{y^2} = \frac{500}{\left(\frac{250}{x^2}\right)^2} = \frac{x^4}{125}, \quad x^3 = 125, \quad x = 5, \quad y = \frac{250}{25} = 10,$$

$$z = \frac{500}{5 \cdot 10} = 10.$$

5.9.14



Volum $V = lhd = 5000$

$$d = \frac{5000}{lh}$$

Del	Areal	Pris
Front	lh	$1000lh$
Sidekanter	$lh + 2dh = lh + \frac{10000}{l}$	$300lh + \frac{3 \cdot 10^6}{l}$
Bunn	$dl = \frac{5000}{h}$	$\frac{2 \cdot 5 \cdot 10^6}{h}$

Total pris: $f(l,h) = 1000lh + 300lh + \frac{3 \cdot 10^6}{l} + \frac{2.5 \cdot 10^6}{h}$

$$= 100\left(13lh + \frac{30.000}{l} + \frac{25.000}{h}\right)$$

$f(l,h)$ vil ha et globalt minimum i mengden $l>0, h>0$ (se 5.9.11). (Faktoren 100 er uten betydning.)

$$\frac{\partial f}{\partial l} = 13h - \frac{30.000}{l^2} = 0 \Rightarrow h = \frac{30.000}{13 l^2}$$

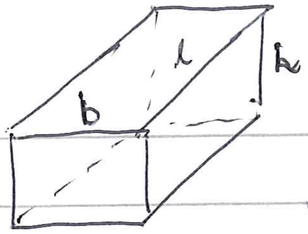
$$\frac{\partial f}{\partial h} = 13l - \frac{25.000}{h^2} = 0 \Rightarrow l = \frac{25.000}{13h^2}.$$ Dette gir

$$h = \frac{30.000}{13 l^2} = \frac{30.000}{13 \cdot \left(\frac{25.000}{13h^2}\right)^2} = \frac{13 \cdot 1.2 \cdot h^4}{25000}$$

$$h^3 = \frac{25000}{13 \cdot 1.2} = \frac{125.000}{13 \cdot 1.2 \cdot 5} = \frac{125000}{78} \Rightarrow \underline{\underline{h = \frac{50}{\sqrt[3]{78}}}}$$

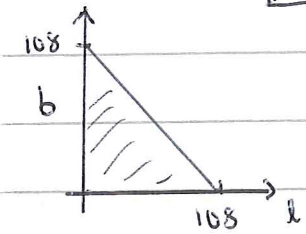
$$l = \frac{25.000 \cdot 78^{2/3}}{13 \cdot 2500} = \frac{10 \cdot 78}{13 \cdot 78^{1/3}} = \frac{10 \cdot 6}{78^{1/3}} = \underline{\underline{\frac{60}{\sqrt[3]{78}}}}$$

5.9.16



$l + b + h = 108$, $h = (108 - l - b)$

$V = lbh = lb(108 - l - b) = 108lb - l^2 b - lb^2$



Ekstremverdisetningen gir at V har maks i mengden $\{(l,b);\ l \geq 0,\ b \geq 0,\ l + b \leq 108\}$. Kan ikke være på kanten, siden $V = 0$ der.

Må være stasjonært punkt.

(I) $\frac{\partial V}{\partial l} = 108b - 2lb - b^2 = b(108 - 2l - b) = 0 \Rightarrow b + 2l = 108$

(II) $\frac{\partial V}{\partial b} = l(108 - 2b - l) = 0 \qquad \Rightarrow l + 2b = 108.$

Dette gir $l = b = 36$, og dermed $h = 108 - l - b = 36$ også.

$V_{maks} = 36^3 = 6^6 \text{ m}^3$

5.9.18 A produserer x enheter, B produserer y.

Fortjeneste A : $P = 12.000x - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4}$

B : $Q = 12.000y - \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{6}$

a) Antall enheter x som maksimerer fortjenesten for A er gitt ved

$0 = \frac{\partial P}{\partial x} = 12.000 - x$, dvs $x = 12.000$

Tilsvarende for B er

$0 = \frac{\partial Q}{\partial y} = 12.000 - y$, dvs $y = 12.000$

Fortjenestene er da

$P = (12.000)^2 \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot 144 \text{ mill} = \underline{\underline{36 \text{ mill.}}}$

$Q = (12.000)^2 \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3} \cdot 144 \text{ mill} = \underline{\underline{48 \text{ mill}}}$

b) Total fortjeneste er $P+Q$, som har maksimal verdi i et stasjonært punkt

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial x} = 12000 - x - \frac{1}{3}x = 0, \quad \frac{4}{3}x = 12000, \quad x = 9000$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{1}{2}y + 12000 - y = 0. \quad \frac{3}{2}y = 12000, \quad y = 8000$$

Fortjenestene er da

$$P = 10^6\left(12\cdot 9 - \frac{81}{2} - \frac{64}{4}\right) = \underline{51.5 \text{ mill}}$$

$$Q = 10^6\left(12\cdot 8 - \frac{64}{2} - \frac{81}{6}\right) = \underline{50.5 \text{ mill}}$$

c) Hvis A fastholder $x = 9.000$, hvilket nivå gir B størst mulig fortjeneste? Og hva er da fortjenestene?

Første spørsmål følger fra a), $y = 12.000$. Dette gir

$$P = 10^6\left(12\cdot 9 - \frac{81}{2} - \frac{144}{4}\right) = \underline{31.5 \text{ mill}}$$

$$Q = 10^6\left(12\cdot 12 - \frac{144}{2} - \frac{81}{6}\right) = \underline{58.5 \text{ mill}}$$

- Lagranges multiplikatormetode. Hvis f har lokal maks eller min i $\bar{x}$ under bibetingelsen $g = c$, så er enten $\nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla g(\bar{x})$ for en $\lambda \in \mathbb{R}$, eller $\nabla g(\bar{x}) = \bar{0}$

<u>5.10.1</u>

a) Maks/min for $f(x,y) = 4x - 3y$ når $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$

Lagrange ligningene (I) $4 = \lambda \cdot 2x$

(II) $-3 = \lambda \cdot 2y$

$\frac{I}{II}: \; -\frac{4}{3} = \frac{x}{y}, \quad y = -\frac{3}{4}x$

$x^2 + y^2 = x^2 + \frac{9}{16}x^2 = \frac{25}{16}x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{25}, \quad x = \pm\frac{4}{5}, \quad y = \mp\frac{3}{5}$

$f\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = \frac{16}{5} - \left(-\frac{9}{5}\right) = 5$ Maks verdi

$f\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = -\frac{16}{5} - \left(\frac{9}{5}\right) = -5$ Min. verdi

c) Maks/min for $f = x^2 + y^2 + z^2$ når $g = 2x - 3y + 2z = 17$

Svar: Mengden $g = 17$ er et plan og f er avstanden i annen til et punkt. Klart at f har min, men ikke maks.

$$\left.\begin{array}{ll} 2x = 2\lambda, & x = \lambda \\ 2y = -3\lambda, & y = -\frac{3}{2}\lambda \\ 2z = 2\lambda, & z = \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2x - 3y + 2z = 2\lambda + \frac{9}{2}\lambda + 2\lambda = \frac{17}{2}\lambda = 17$$

dvs. $\lambda = 2$

Altså $(x, y, z) = (2, -3, 2)$ og $f_{min} = 4 + 9 + 4 = 17$.

d) Maks/min for $f = x + y + z$ når $x^2 + y^2 = 1$ og $2x + z = 1$

Svar:

f har både maks og min (Ekstremverdisetningen).

Kan bruke 2 Lagrange multiplikatorer, men enklere å bruke $z = 1 - 2x$, så $f = x + y + (1 - 2x) = -x + y + 1$.

$$\begin{array}{l} -1 = \lambda \cdot 2x \\ 1 = \lambda \cdot 2y \end{array} \Rightarrow y = -x$$

$x^2 + y^2 = 2x^2 = 1, \quad x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad y = \mp\frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad z = 1 \mp \sqrt{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\right) = 1 - \sqrt{2}$ Min

$f\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right) = 1 + \sqrt{2}$ Maks

e) Maks / min for $f = 2x + 3y$ når $3x^2 + 2y^2 = 3$

Svar: f har både maks og min ved ekstremverdisetningen

(I) $2 = \lambda \cdot 6x$

(II) $3 = \lambda \cdot 4y$

$\frac{I}{II}$ $\quad \frac{2}{3} = \frac{6}{4}\frac{x}{y}$, $y = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{4} x = \frac{9}{4} x$

$3x^2 + 2y^2 = x^2\left(3 + 2 \cdot \frac{81}{16}\right) = x^2 \cdot \frac{210}{16} = 3$

$x^2 = \frac{16}{70}$, $x = \pm \frac{4}{\sqrt{70}}$, $y = \pm \frac{9}{\sqrt{70}}$

$f\left(\frac{4}{\sqrt{70}}, \frac{9}{\sqrt{70}}\right) = \frac{8}{\sqrt{70}} + \frac{27}{\sqrt{70}} = \frac{35}{\sqrt{70}} = \underline{\sqrt{\frac{35}{2}}}$ Maks.

$f\left(-\frac{4}{\sqrt{70}}, -\frac{9}{\sqrt{70}}\right) = \underline{-\sqrt{\frac{35}{2}}}$ Min.

5.10.2 Punktene på flaten $z^2 - xy = 1$ som ligger nærmest origo.

Svar: Det gjelder å minimere $f = x^2 + y^2 + z^2$ når

$g = z^2 - xy = 1$

I $\quad 2x = -\lambda y \qquad x = -\frac{1}{2}\lambda y$

II $\quad 2y = -\lambda x \qquad y = -\frac{1}{2}\lambda x.$

III $\quad 2z = 2\lambda z$

Dette gir $x = -\frac{1}{2}\lambda y = \frac{1}{4}\lambda^2 x$. To muligheter $x = 0$ eller $\lambda = \pm 2$ (og $x \neq 0$)

$x = 0$ gir $y = 0$ og $z^2 = 1$, dvs $z = \pm 1$.

$f(0, 0, \pm 1) = 1$.

$\lambda = \pm 2$. Da blir III $2z = \pm 4z$, altså $z = 0$

Videre $1 = -xy = -x \cdot (\mp x) = \pm x^2$. Må ha $\lambda = +2$. Men vi får

$f = x^2 + y^2 = 1 + 1 = 2$.

Altså: Punktene $(0, 0, \pm 1)$ ligger nærmest.

5.10.3 Punktene på skjæringskurven mellom flatene $x^2+y^2=1$ og $x^2-xy+y^2-z^2=1$ som ligger nærmest origo.

Svar: Vi må minimalisere $f=x^2+y^2+z^2$ på kurven. Kan gjøres med to Lagrange multiplikatorer, men det er lettere slik: Vi ser at $f=1+z^2$ og fra andre ligning får vi $xy+z^2=0$. $z=0$ gir åpenbart minimal verdi av f og da er $xy=0$, dvs $x=0$ eller $y=0$. Får da fire punkter

$$(\pm 1,0,0),\ (0,\pm 1,0).$$

5.10.5 Løs 5.9.12 ved hjelp av Lagrange multiplikatoren.

Svar: Oppgaven består i å minimere $L=4x+2y+2z$ når $V=xyz=500$. Ligningene er $\nabla L=\lambda\nabla V$;

$$\begin{aligned} 4&=\lambda yz & 4x&=500\lambda \\ 2&=\lambda xz & 2y&=500\lambda \\ 2&=\lambda xy & 2z&=500\lambda \end{aligned}$$

$$xyz=\frac{(500)^3\lambda^3}{4\cdot 2\cdot 2}=500\ ,\quad \lambda^3=\frac{16}{(500)^2}\ \Rightarrow\ \lambda=\frac{1}{25}$$

$$x=125\lambda=5\ ,\quad y=250\lambda=10\ ,\quad z=250\lambda=10.$$

5.10.8 $f=\ln(x^2+y^2+1)-\frac{x^2}{2}+y^2$

a) Finn stasjonære punkter og bestem deres type.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2+1}-x=x\left(\frac{2}{x^2+y^2+1}-1\right)=0\ \Rightarrow\ x=0 \text{ eller } x^2+y^2=1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+1}+2y=y\left(\frac{2}{x^2+y^2+1}+2\right)=0\ \Rightarrow\ y=0$$

Stasjonære punkter

$$(0,0),\ (\pm 1,0)$$

	$(0,0)$	$(1,0)$	$(-1,0)$
$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\left(\frac{2}{x^2+y^2+1}-1\right)+x\left(\frac{-4x}{(x^2+y^2+1)^2}\right)$	1	-1	-1
$B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{-4xy}{(x^2+y^2+1)^2}$	0	0	0
$C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\left(\frac{2}{x^2+y^2+1}+2\right)+y\left(\frac{-4y}{(x^2+y^2+1)^2}\right)$	4	3	3
$D=AC-B^2$	4	-3	-3
	Lokalt min	Sadelpunkt.	Sadelpunkt.

b) f har maks og min på $\{x^2+y^2\le 1\}$ i følge ekstremverdisetningen. Mulige punkter er indre lokale maks/min eller randpunkter.

Indre punkter: $f(0,0)=\ln 1-0-0=0$

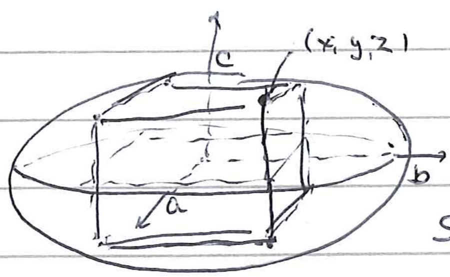
På randen $y^2=1-x^2$, $f=\ln 2+1-\frac{3}{2}x^2$ som har maks i 0 og min i ± 1.

$$f(0,\pm 1)=\ln 2+1 \qquad \text{Makspunkter}$$

$$f(\pm 1,0)=\ln 2-\frac{1}{2}>0.$$

Minimum $f_{min}=0$ i $(0,0)$.

5.10.11



$V=8xyz$. Finn max V når

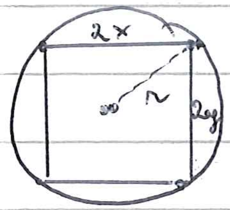
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (x,y,z\ge 0).$$

Svar:
$$8yz=\lambda 2\frac{x}{a^2} \Rightarrow 8xyz=2\lambda\frac{x^2}{a^2}$$
$$8xz=\lambda 2\frac{y}{b^2} \Rightarrow 8xyz=2\lambda\frac{y^2}{b^2}$$
$$8xy=\lambda 2\frac{z}{c^2} \Rightarrow 8xyz=2\lambda\frac{z^2}{c^2}.$$

Det følger at $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$. De må da alle være $\frac{1}{3}$. Dette gir

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}},\ y=\frac{b}{\sqrt{3}},\ z=\frac{c}{\sqrt{3}} \Rightarrow \underline{\underline{V=\frac{8}{3\sqrt{3}}xyz.}}$$

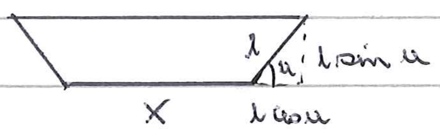
5.10.12 Vi har $x^2+y^2=r^2$. Må finne max $f(x,y)=kxy^2$



$$ky^2=\lambda\cdot 2x \Rightarrow 2kxy^2=4\lambda x^2$$
$$2kxy=\lambda\cdot 2y \Rightarrow 2kxy^2=2\lambda y^2$$

Altså $y^2=2x^2$, så $x^2+y^2=3x^2=r^2$, $\underline{\underline{x=\frac{r}{\sqrt{3}}}}$, $y^2=\frac{2}{3}r^2$, $\underline{\underline{y=\sqrt{\frac{2}{3}}\,r.}}$

5.10.13



$$A=(x+2l\cos u+x)\cdot\frac{1}{2}l\sin u$$
$$=xl\sin u+l^2\sin u\cos u$$

Problem: Finn max A når $g=x+2l=b$. $\nabla A=\lambda\nabla g$:

I $\quad l\sin u=\lambda$

II $\quad x\sin u+2l\sin u\cos u=2\lambda$

III $\quad xl\cos u+l^2(\cos^2 u-\sin^2 u)=0$

(I) + (II) gir $x\sin u+2l\sin u\cos u=2l\sin u$. Vi har $\sin u\neq 0$

$x+2l\cos u=2l \Rightarrow x=2l(1-\cos u)$ Setter inn i (III):

$$2l(1-\cos u)\,l\cos u+l^2(\cos^2 u-\sin^2 u)=l^2(2\cos u-2\cos^2 u+\cos^2 u-\sin^2 u)$$

$=l^2(2\cos u-1)=0$. Må ha $\cos u=\frac{1}{2}$, dvs $\underline{\underline{u=\frac{\pi}{3}}}$

Da er $x=2l(1-\cos u)=2l\cdot\frac{1}{2}=l$, så $x+2l=3l=b$, $l=\frac{b}{3}$.

og dermed $\underline{\underline{x=\frac{b}{3}.}}$

5.10.14 Vi skal maksimere $A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$ under betingelsen $g = x+y+z = 2s$. Samme som å maksimere $A^2 = s(s-x)(s-y)(s-z)$. Vi får

$$-s(s-y)(s-z) = \lambda$$

$$-s(s-x)(s-z) = \lambda$$

$$-s(s-x)(s-y) = \lambda$$

Dette gir

$$\lambda(s-x) = \lambda(s-y) = \lambda(s-z).$$ Kan ikke ha $\lambda = 0$; så vi får $s-x = s-y = s-z$ som gir $\underline{\underline{x = y = z}}$