- Rekka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent : Følgen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergerer
- Divergenstesten : Hvis ikke a_n går mot 0, så er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

12.1.4 Vis at disse rekkene divergerer:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$. $\lim_{n\to\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2} \neq 0$, altså divergent

i følge divergenstesten.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$. $\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \cos 0 = 1 \neq 0$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\sin\frac{1}{n}\right)^n$. Dette er en grense på formen 1^∞. Da

tar vi logaritmen!

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1-\sin\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1-\sin\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1-\sin\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-\sin x)}{x} \underset{\text{L'Hop}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{1-\sin x} = -1.$$

Altså $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-1} \neq 0$.

12.1.5

a) $$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} = \frac{A(k+1)+Bk}{k(k+1)}$$

Vi får

$A(k+1) + Bk = 1 \Rightarrow A+B=0,\ A=1$, altså $B=-1$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

Bevis: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

$$= \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

c) $\displaystyle s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Dette viser at $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ er konvergent og at summen er 1.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$. (Kalles teleskopiske rekke).

- For at en rekke med positive ledd $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ skal konvergere, må leddet a_n gå mot 0 med en viss fart. Det er ofte lettest å sammenligne med en rekke vi vet er konvergent eller divergent:

Grensesammenligningstesten (GST):
Anta $a_n > 0$ og $b_n \geq 0$ for alle n.

Hvis $\sum a_n$ konvergerer og $\lim \frac{b_n}{a_n} < \infty$, så konvergerer $\sum b_n$

Hvis $\sum a_n$ divergerer og $\lim \frac{b_n}{a_n} > 0$, så divergerer $\sum b_n$.

- Ofte nyttig å sammenligne med $\sum^{\infty} \frac{1}{n^p}$ som konvergerer når $p > 1$ og divergerer når $p \leq 1$.

· II Integraltesten: Hvis $f(x) > 0$ er avtagende så gjelder

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergerer} \iff \text{Integralet } \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ konvergerer.}$$

12.2.1 Bruk integraltesten!

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \ln x \Big|_1^R = \lim_{R\to\infty} \ln R = \infty,$$

altså er rekka divergent.

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{R\to\infty} \arctan x \Big|_0^R =$$

$\displaystyle\lim_{R\to\infty} \arctan R = \frac{\pi}{2}$, altså er rekka konvergent.

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n\right)$

La oss først integrere $\arctan x$!

$$\int \arctan x\,dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \arctan x & u' = \dfrac{1}{1+x^2} \\ v' = 1 & v = x \end{array}}$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \;(+C).$$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) dx = \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{2}R - R\arctan R + \frac{1}{2}\ln(1+R^2)$$

$$= \lim_{R\to\infty} R\left(\frac{\pi}{2} - \arctan R\right) + \frac{1}{2}\ln(1+R^2) = \infty \quad \text{siden} \quad \frac{\pi}{2} - \arctan R > 0.$$

altså er rekka divergent.

12.2.2 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ konvergerer hvis og bare hvis $p > 1$.

Bevis: Beregner først

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx = \int \frac{du}{u^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} u^{1-p} & p \neq 1 \\ \ln u & p = 1 \end{cases}$$

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x}\,dx$

$$= \begin{cases} \frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p} & p \neq 1 \\ \ln(\ln x) & p = 1 \end{cases}$$

Vi ser så at $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}\,dx < \infty$

$\Updownarrow$

$p > 1.$

Resultatet følger så fra integraltesten.

12.2.3 Vi bruker GST. Må da finne ut omtrent hvor stort leddet er og så sammenligne med det.

a) Kladd: $\displaystyle\frac{7n^2 + \cancel{3}}{4n^3 - \cancel{2}} \sim \frac{7n^2}{4n^3} = \frac{7}{4}\cdot\frac{1}{n}$

Vi sammenligner med $\sum \frac{1}{n}$, som er divergent:

$$\lim \frac{7n^2+3}{(4n^3-2)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{7n^3+3n}{4n^3-2} = \lim \frac{7 + 3/n^2}{4 - 2/n^3} = \frac{7}{4} > 0.$$

Altså divergent ved GST.

b) Kladd: $\frac{2n-\cancel{7}}{4n^3+\cancel{8}} \sim \frac{2n}{4n^3} = \frac{1}{2n^2}$

Vi sammenligner med $\sum \frac{1}{n^2}$, som er konvergent.

$$\lim \frac{2n-7}{4n^3+8} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{2n^3-7n^2}{4n^3+8} = \frac{1}{2} < \infty .$$

Altså konvergent ved GST.

d) Kladd: $\frac{\cos\frac{1}{n}}{n+\cancel{\sqrt{n}}} \sim \frac{1}{n}$

Vi sammenligner med $\sum \frac{1}{n}$, som er divergent.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{n}}{n+\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{n}}{1+1/\sqrt{n}} = \frac{1}{1} = 1 > 0$$

Altså divergent ved GST.

f) Vi vet at $\sin x \sim x$ for x liten, så vi sammenligner med $\sum \frac{1}{n}$, som er divergent.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \underset{\uparrow}{=} \lim \frac{(\cos\frac{1}{n})\cdot(-\frac{1}{n^2})}{(-\frac{1}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n} = 1 > 0$$

L'Hop.

Altså divergent ved GST.

12.2.5. Bruk forholdstest (FT) eller rottest (RT) til å avgjøre om rekken konvergerer. Må avgjøre om $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ eller $\sqrt[n]{a_n}$ er enklest.

a) $\sum n\frac{1}{3^n}$. $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)3^n}{3^{n+1}\cdot n} = \lim \frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$

altså konvergent ved FT.

b) $\sum \frac{3^n}{n^{10}}$ (Merk! Denne er opplagt divergent ved divergenstesten).

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{3^{n+1}}{(n+1)^{10}} \cdot \frac{n^{10}}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}} = 3 > 1.$$

altså divergent ved FT.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

altså konvergent ved RT.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$.

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{e^n} = \lim \frac{e}{n+1} = 0$$

altså konvergent ved FT.

e) $\sum \frac{2^n}{n^n}$.

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \left(\frac{2^n}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim \frac{2}{n} = 0$$

altså konvergent ved RT.

f) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{2n!}{(n!)^2} = \lim \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1$$

altså konvergent ved FT.

g) $\sum \frac{n!\,4^n}{n^n}$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)!\,4^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!\,4^n} = \lim \frac{(n+1)\,4}{(n+1)\,(1+\frac{1}{n})^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{4}{e} > 1$$, altså divergent ved FT.

12.2.6 Vis at FT ikke gir avgjørelse. Bruk en annen test.

a) $\sum \frac{n}{n^2+1}$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)\cdot(n^2+1)}{((n+1)^2+1)\,n} = \lim \frac{n^3+n^2+n+1}{n^3+2n^2+2n} = 1$$

Da gir FT ingen konklusjon. Vi ser at $a_n \sim \frac{1}{n}$. Bruker derfor GST.

$$\lim \frac{n}{(n^2+1)\cdot(\frac{1}{n})} = \lim \frac{n}{n+\frac{1}{n}} = \lim \frac{1}{1+1/n^2} = 1 > 0$$

altså divergent ved GST.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sinh \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\sinh \frac{1}{n+1}}{\sinh \frac{1}{n}} \overset{\text{L'Hop.}}{=} \lim \frac{(\cosh \frac{1}{n+1})\cdot \frac{-1}{(n+1)^2}}{(\cosh \frac{1}{n})(-\frac{1}{n^2})} =$$

$$\lim \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{\cosh \frac{1}{n+1}}{\cosh \frac{1}{n}} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$, altså gir ikke FT konklusjon.

Igjen er $a_n \sim \frac{1}{n}$. Bruker GST

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sinh \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \underset{\text{L'Hop.}}{=} \lim \frac{(\cosh \frac{1}{n})\cdot(-\frac{1}{n^2})}{(-\frac{1}{n^2})} = \lim \cosh \frac{1}{n} = 1 > 0$$

altså divergent ved GST.

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cosh\frac{1}{n}\right)$. Her er alle ledd negative! Vi ser på

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cosh\frac{1}{n}-1\right)$ i stedet.

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\cosh\frac{1}{n+1}-1}{\cosh\frac{1}{n}-1} \overset{\text{L'Hop}}{=} \lim \frac{\left(\sinh\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)}{\left(\sinh\frac{1}{n}\right)\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \lim \frac{n^2 \sinh\frac{1}{n+1}}{(n+1)^2 \sinh\frac{1}{n}} = 1 \quad \text{(Se forrige oppgave)}$$

Sammenlign med $\sum\frac{1}{n^2}$, som er konvergent.

$$\lim \frac{\cosh\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n^2}} \underset{\text{L'Hop.}}{=} \lim \frac{\left(\sinh\frac{1}{n}\right)\cdot -\frac{1}{n^2}}{-2\frac{1}{n^3}} = \lim \frac{\sinh\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}} \underset{\text{L'Hop}}{=}$$

$$\lim \frac{\left(\cosh\frac{1}{n}\right)\cdot\left(-\frac{1}{n^2}\right)}{-\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$$, altså konvergent ved GST.

12.2.7

a) $\sum \frac{7}{n^2+2n+3}$. Sammenlign med $\sum \frac{1}{n^2}$, som

er konvergent. $\lim \frac{7}{(n^2+2n+3)\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \lim \frac{7}{1+2/n+3/n^2} = 7 < \infty$,

altså konvergent ved GST

b) $\sum \frac{\sqrt{n}}{1+n}$. Sammenlign med $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$, som er

divergent. $\lim \frac{\sqrt{n}}{(1+n)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \lim \frac{n}{1+n} = 1 > 0$, altså

divergent ved GST. Kunne ha sammenlignet med $\sum\frac{1}{n}$ også.

c) $\sum \frac{\ln n}{n}$. Sammenlign med $\sum \frac{1}{n}$, som er divergent.

$$\lim \frac{\ln n}{n\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim \ln n = \infty > 0$$, altså divergent ved GST.

d) $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Divergent siden $\lim a_n = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$

e) $\sum n e^{-n^2}$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{e^{-(n+1)^2}}{(n+1)} \frac{n}{e^{-n^2}} = \lim \frac{n}{n+1} \frac{e^{-(n^2+2n+1)}}{e^{-n^2}}$$

$$= \lim e^{-(2n+1)} = 0$$, altså konvergent ved FT.

f) $\sum \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \sum \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)}$

Sammenlign med $\sum \frac{1}{n}$, som er divergent

$$\lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{e} > 0,$$

altså divergent ved GST.

g) $\sum \frac{2^n n!}{(2n)!}$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{2^{n+1} (n+1)! \, (2n)!}{(2n+2)! \; 2^n \; n!} = \lim \frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = 0$$

altså konvergent ved FT.

- En alternerende rekke er konvergent hvis leddene går mot 0 monotont.

12.3.1

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2+1}$ er konvergent siden den er alternerende og $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$ monotont.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n+7n^2}$ er divergent siden leddene ikke går mot 0 : $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+7n^2} = \frac{1}{7}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ er konvergent siden den er alternerende og $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ monotont.

12.4.1

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$ er konvergent siden den er alternerende og $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ monotont. Den er ikke absolutt konvergent siden $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ er divergent. (Se oppgave 12.2.1a)
Altså betinget konvergent.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+4}$ er absolutt konvergent siden $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n^2+4}$ som er konvergent ved GST (sammenlign med $\sum \frac{1}{n^2}$)

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin \frac{1}{n}$ er konvergent siden den er alternerende og $\lim_{n\to\infty} \arcsin \frac{1}{n} = 0$ monotont.

For å avgjøre om den er absolutt konvergent sammenligner vi med $\sum \frac{1}{n}$, som er divergent.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{\left(1/\sqrt{1-(\frac{1}{n})^2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{n^2}\right)}{\left(-\frac{1}{n^2}\right)} = \lim \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}} = 1 > 0$$

Rekka er ikke absolutt konvergent, altså betinget konvergent.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ er konvergent siden den er

alternerende og $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0$ monotont. ($f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ er

strengt avtagende for $x \geq 1$).

Vi sammenligner $\sum |a_n|$ med $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$, som er divergent.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 > 0$$, Altså er $\sum |a_n|$ divergent

og rekka er betinget konvergent.