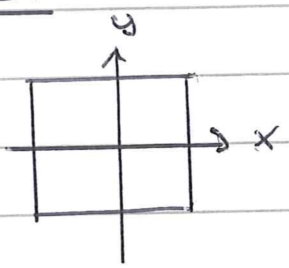
Ekte ulikheter (>) : Åpne mengder
U.ekte ulikheter (≥) : Lukkede mengder
Blanding (> og ≥) : Ingen av delene

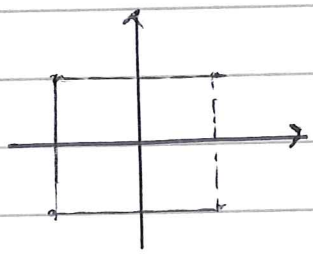
5.1.1.

a)



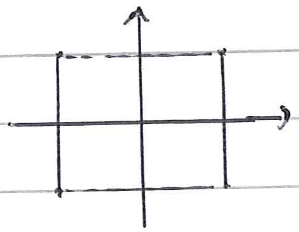
$|x| \leq 1$ og $|y| \leq 1$. Lukket fordi alle kantene $x = \pm 1, |y| \leq 1$ og $y = \pm 1, |x| \leq 1$ er med.

b)



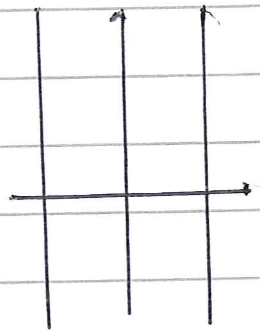
$|x| < 1$ og $|y| < 1$. Åpen fordi ingen av kantene er med

c)



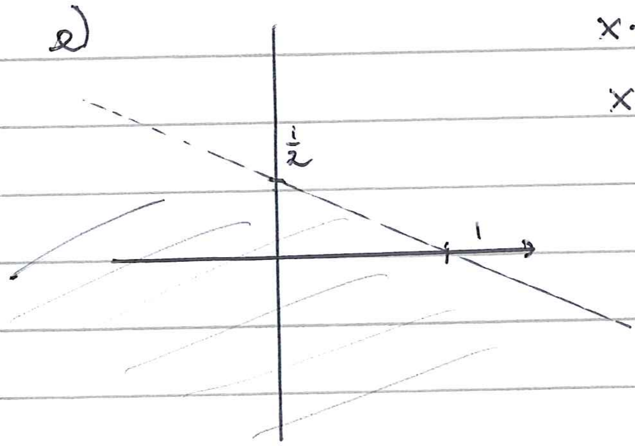
$|x| \leq 1$ og $|y| < 1$. Hverken åpen eller lukket, siden noen, men ikke alle, av kantene er med.

d)



$|x| \leq 1$. Denne er ubegrenset i y-retning. Lukket siden begge kantene er med

e)



$x + 2y < 1$. Åpen siden kanten $x + 2y = 1$ ikke er med.

5.1.2

a) $\bar{x}_n = \left(\frac{2n^2+1}{n^2+3n} , \frac{3n}{1-2n} \right)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2+3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+1/n^2}{1+3/n} = \frac{2+0}{1+0} = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{1-2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{1/n-2} = \frac{3}{0-2} = -\frac{3}{2}$$

$\lim \bar{x}_n = \underline{\underline{\left(2, -\frac{3}{2}\right)}}$. Kan også bruke L'Hopital.

b) $\bar{x}_n = \left(n \sin\frac{1}{n} , n\left(1-e^{2/n}\right) \right)$

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x=\frac{1}{n}}} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

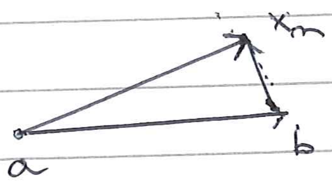
$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-e^{2/n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-e^{2/n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^{2x}}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2e^{2x}}{1} = -2$$

$$\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n = \underline{\underline{(1, -2)}}$$

5.1.4 Anta $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^m$, $\lim \bar{x}_n = \bar{b}$. Da er $\lim |\bar{x}_n - \bar{a}| = |\bar{b} - \bar{a}|$

Bevis: Vi viser først at

$$\big| |\bar{x}_n - \bar{a}| - |\bar{b} - \bar{a}| \big| \le |\bar{x}_n - \bar{b}|$$



$$\Updownarrow$$

$$-|\bar{x}_n - \bar{b}| \le |\bar{x}_n - \bar{a}| - |\bar{b} - \bar{a}| \le |\bar{x}_n - \bar{b}|$$

Høyre ulikhet er bare trekantulikheten

$$|\bar{x}_n - \bar{a}| \le |\bar{x}_n - \bar{b}| + |\bar{b} - \bar{a}|$$

Men det er venstre også

$$|\bar{b}-\bar{a}| \le |\bar{b}-\bar{x}_n| + |\bar{x}_n-\bar{a}| = |\bar{x}_n-\bar{b}| + |\bar{x}_n-\bar{a}|.$$

Vi vet at $\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n = \bar{b} \iff \lim_{n\to\infty} |\bar{x}_n - \bar{b}| = 0$

Ulikheten gir da at $\lim |\bar{x}_n-\bar{a}| - |\bar{b}-\bar{a}| = 0$, dvs.

$$\lim |\bar{x}_n-\bar{a}| = |\bar{b}-\bar{a}|.$$

5.1.6. Hvis $\bar{c}$ er et randpunkt for A, så fins to følger $\{\bar{x}_n\}$ og $\{\bar{y}_n\}$ som konvergerer mot $\bar{c}$ og slik at $\bar{x}_n \in A$ og $\bar{y}_n \notin A$ for alle n.

Bevis: Minner om definisjonen: Enhver kule $B(\bar{c}, r)$ inneholder både punkter som er i A og punkter som ikke er i A. Vi velger nå $\bar{x}_1, \bar{y}_1 \in B(\bar{c}, 1)$ slik at $\bar{x}_1 \in A$ og $\bar{y}_1 \notin A$. Videre $\bar{x}_2, \bar{y}_2 \in B(\bar{c}, \frac{1}{2})$ slik at $\bar{x}_2 \in A$ og $\bar{y}_2 \notin A$. Fortsetter slik og velger $\bar{x}_n, \bar{y}_n \in B(\bar{c}, 1/n)$ slik at $\bar{x}_n \in A$ og $\bar{y}_n \notin A$. Det følger at $|\bar{x}_n - \bar{c}| < \frac{1}{n}$ og $|\bar{y}_n - \bar{c}| < \frac{1}{n}$ for alle n. Dette gir at

$$\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n = \lim_{n\to\infty} \bar{y}_n = \bar{c}$$

Altså oppfyller følgene $\{\bar{x}_n\}$ og $\{\bar{y}_n\}$ betingelsene.

5.2. $\{\bar{x}_n\}$ fölge i $\mathbb{R}^m$

En delfölge er $\{\bar{y}_k\}$ der $\bar{y}_k = \bar{x}_{n_k}$ der

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k <$$

Det fölger at $n_k \geq k$.

Videre: $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{x}_n = \bar{x}$ hvis det til enhver $\epsilon > 0$ fins N slik at $|\bar{x}_n - \bar{x}| < \epsilon$ for alle $n \geq N$. Dette er ekvivalent med $\lim\limits_{n\to\infty} |\bar{x}_n - \bar{x}| = 0$

5.2.1 Hvis $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{x}_n = \bar{x}$, så vil enhver delfölge også konvergere mot $\bar{x}$

Bevis: La $\bar{y}_k = \bar{x}_{n_k}$ være en delfölge og la $\epsilon > 0$. Da fins N slik at $|\bar{x}_k - \bar{x}| < \epsilon$ når $k \geq N$. Hvis $k \geq N$, så er

$$|\bar{y}_k - \bar{x}| = |\bar{x}_{n_k} - \bar{x}| < \epsilon \quad \text{siden } n_k \geq k \geq N.$$

Altså er $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{y}_k = \bar{x}$

5.2.4 $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ er et opphopningspunkt for fölgen $\{\bar{x}_n\}$ hvis enhver kule $B(\bar{x}, r)$ inneholder uendelig mange $\bar{x}_n$.

(a) $\bar{x}$ er opphopningspunkt for $\{\bar{x}_n\}$ $\Leftrightarrow$ $\{\bar{x}_n\}$ har en delfölge som konvergerer mot $\bar{x}$

Bevis: $\Rightarrow$ $B(\bar{x}, 1)$ inneholder uendelig mange $\bar{x}_n$, velg n_1 slik $\bar{x}_{n_1} \in B(\bar{x}, 1)$. $B(\bar{x}, \frac{1}{2})$ inneholder også uendelig mange. Vi kan anta at $n_2 > n_1$. Velg en slik $\bar{x}_{n_2} \in B(\bar{x}, \frac{1}{2})$, siden vi har uendelig mange å velge fra.

Vi fortsetter slik og velger $\bar{x}_{n_k} \in B(\bar{x}, \frac{1}{k})$ for alle k og slik at $n_k > n_{k-1}$. Da er $\bar{y}_k = \bar{x}_{n_k}$ en delfölge og $\lim_{k\to\infty} |\bar{y}_k - \bar{x}| = 0$ siden $|\bar{y}_k - \bar{x}| < 1/k$. $\{\bar{y}_k\}$ er da en delfölge av $\{\bar{x}_n\}$ som konvergerer mot $\bar{x}$.

$\Leftarrow$ La $\{\bar{y}_k\} = \{\bar{x}_{n_k}\}$ være en delfölge som konvergerer mot $\bar{x}$ og la $r > 0$. Da fins en N slik at $|\bar{y}_k - \bar{x}| < r$ når $k \geq N$. Men da er $\bar{x}_{n_k} \in B(\bar{x}, r)$ for $k \geq N$, og det er uendelig mange.

b) Enhver fölge $\{\bar{x}_n\}$ i en lukket og begrenset mengde $A \subset \mathbb{R}^m$ har et opphopningspunkt i A.

Bevis: $\{\bar{x}_n\}$ er begrenset og har derfor en konvergent delfölge i fölge Bolzano-Weierstrass. Grensepunktet $\bar{x}$ må være i A siden A er lukket (Setning 5.1.8). Altså er $\bar{x}$ et opphopningspunkt for $\{\bar{x}_n\}$ i fölge a).

c) Hvis $A \subset \mathbb{R}^m$ ikke er lukket, så fins en fölge i A som ikke har et opphopningspunkt i A.

Bevis: Hvis A ikke er lukket, så har A et randpunkt $\bar{x}$ som ikke er i A. Siden $\bar{x}$ er et randpunkt fins for hver k en $\bar{x}_k \in A$ slik at $\bar{x}_k \in B(\bar{x}, 1/k)$. Det fölger at $\lim_{k\to\infty} \bar{x}_k = \bar{x}$.

$\{\bar{x}_k\}$ kan ikke ha noe opphopningspunkt $\bar{y} \in A$, for da ville vi hatt en delfölge som konvergerer mot $\bar{y}$ iflg (a), men i fölge oppgave 5.2.1. konvergerer enhver delfölge mot $\bar{x}$.

d) Hvis $A \subset \mathbb{R}^m$ ikke er begrenset, så finnes en følge i A som ikke har et opphopningspunkt i A (og heller ikke i $\mathbb{R}^m$).

Bevis: Siden A er ubegrenset, finnes for hver n en $\bar{x}_n \in A$ slik at $|\bar{x}_n| > n$. Følgen $\{\bar{x}_n\}$ har ikke noe opphopningspunkt siden den da ville hatt en konvergent delfølge $\{\bar{y}_k\}$. Men $|\bar{y}_k| > k$, så $\{\bar{y}_k\}$ er ubegrenset og derfor ikke konvergent.

Vi har nå bevist:

$A \subset \mathbb{R}^m$ er lukket og begrenset hvis og bare hvis enhver følge i A har en delfølge som konvergerer mot et punkt i A.