

Løsningsforslag oblig 1 Mat 1110 vår 2018

Oppgave 1

a) Teksten sier at

$$\begin{cases} x_{n+1} = 9y_n \\ y_{n+1} = x_n \\ z_{n+1} = y_n \end{cases} \quad \text{dvs.} \quad \begin{cases} x_{n+1} = 0x_n + 9y_n + 0z_n \\ y_{n+1} = x_n + 0y_n + 0z_n \\ z_{n+1} = 0x_n + y_n + 0z_n \end{cases}$$

Altså

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

b) Eigenverdier

$$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{gir} \quad \begin{cases} 0x + 9y + 0z = \lambda x \\ x + 0y + 0z = \lambda y \\ 0x + y + 0z = \lambda z \end{cases}$$

dvs.

$$\begin{cases} -\lambda x + 9y + 0z = 0 \\ x - \lambda y + 0z = 0 \\ 0x + y - \lambda z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\lambda & 9 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} &= -\lambda \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \cdot \lambda^2 - 9 \cdot (-\lambda) + 0 \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 9) \\ &= -\lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3) = 0 \quad \text{gir} \quad \lambda = \begin{cases} 3 \\ -3 \\ 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Eigenverdiene er $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$ og $\lambda_3 = 0$

(Oppg. 1 forts.)

Egenvektorer til $\lambda_1 = 3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{gir} \quad \begin{cases} 9y = 3x & \text{I} \\ x = 3y & \text{II} \\ y = 3z & \text{III} \end{cases}$$

III sier $y = 3z$ I og II sier $x = 3y$, dvs. $x = 9z$

$$\text{Løsn. } \underline{\underline{\begin{pmatrix} 9a \\ 3a \\ a \end{pmatrix}}} \quad a \neq 0$$

Egenvektorer til $\lambda_2 = -3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{gir} \quad \begin{cases} 9y = -3x & \text{I} \\ x = -3y & \text{II} \\ y = -3z & \text{III} \end{cases}$$

III sier $y = -3z$ I og II sier $x = -3y$, dvs. $x = 9z$

$$\text{Løsn. } \underline{\underline{\begin{pmatrix} 9b \\ -3b \\ b \end{pmatrix}}} \quad b \neq 0$$

Egenvektorer til $\lambda_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{gir} \quad \begin{cases} 9y = 0 & \text{I} \\ x = 0 & \text{II} \\ y = 0 & \text{III} \end{cases}$$

I og III sier $y = 0$ II sier $x = 0$

$$\text{Løsn. } \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}}} \quad c \neq 0$$

Hvis tilstanden en sesong er på formen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$ der $k \neq 0$,

så har vi kun gamle kaniner. Disse får ikke unger, og alle er døde neste år. Tilstanden neste sesong er altså

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dette svarer til at tilstanden $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$ er en egenvektor for A med egenverdi 0.

(Oppg. 1 forts.)

$$c) \quad A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 18 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{gir} \quad \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 18 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{dvs.} \quad \begin{cases} 9y = 45 \\ x = 18 \\ y = 5 \end{cases} \quad \text{Løsning:} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 5 \\ t \end{pmatrix} \quad (t \text{ fri variabel})$$

Dette betyr at vi ikke kan regne oss bakover i tiden på en entydig måte, dvs. A er ikke inverterbar.

Vi kan også sjekke dette ved å finne det(A) = 0

d) Søylene i M velges som egenvektorer for A tilhørende $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$M = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Skriver startvektoren $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ som en linearkombinasjon av egenvektorer for A:

$$\begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9a \\ 3a \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9b \\ -3b \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Dette gir

$$\begin{cases} 9a + 9b = 18 & \text{I} \\ 3a - 3b = 0 & \text{II} \\ a + b + c = 0 & \text{III} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{II sier } a = b \\ \text{I sier da } a = b = 1 \\ \text{III sier da } c = -2 \end{cases}$$

Konklusjon:

$$\begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{Stemmer!}$$

Vi får nå, for $n > 0$:

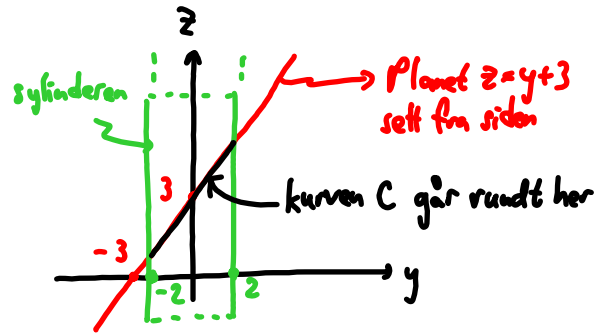
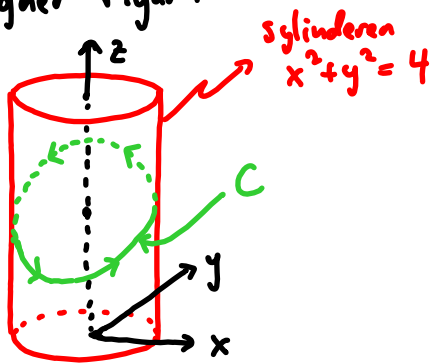
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = A^n \cdot \left[\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right] \\ &= A^n \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + A^n \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= 3^n \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (-3)^n \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 0^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 9 \cdot 3^n + 9 \cdot (-3)^n \\ 3 \cdot 3^n - 3 \cdot (-3)^n \\ 3^n + (-3)^n \end{pmatrix}}} \end{aligned}$$

Oppgave 2

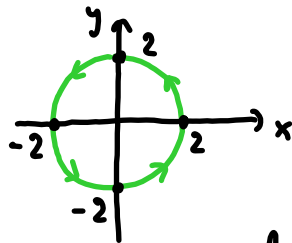
Se egen fil.

Oppgave 3

a) Tegner figur:



"Skyggen" (projeksjonen) av C ned i xy-planet:



Parametrisering av C:

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \\ z(t) = 2 \sin t + 3 \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi)$$

dvs. $\vec{r}(t) = 2 \cos t \vec{i} + 2 \sin t \vec{j} + (2 \sin t + 3) \vec{k}$

$$\begin{aligned} b) \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt \\ &= \int_0^{2\pi} [2 \cos t, 2 \sin t, 2 \cos t] \cdot [-2 \sin t, 2 \cos t, 2 \cos t] dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-4 \sin t \cos t + 4 \sin t \cos t + 4 \cos^2 t) dt \end{aligned}$$

Formelsamling:
 $\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1$
 gir
 $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$

$$\begin{aligned} &= 4 \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = 2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt \\ &= 2 \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{2\pi} = 2 [(2\pi + 0) - (0 + 0)] = \underline{\underline{4\pi}} \end{aligned}$$

c) Siden integralet av \vec{F} rundt den lukkede kurven C ikke er 0, kan ikke \vec{F} være konservativt.

Oppgave 4

a)
$$\begin{cases} x_{n+1} = 40x_n + y_n \\ y_{n+1} = -x_n + 40y_n \end{cases} \text{ gir } \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 1 \\ -1 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

for $n = 0, 1, 2, \dots$

b) Eigenverdier

$$\begin{pmatrix} 40 & 1 \\ -1 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ gir } \begin{cases} 40x + y = \lambda x \\ -x + 40y = \lambda y \end{cases}$$

dvs.
$$\begin{cases} (40 - \lambda)x + y = 0 \\ -x + (40 - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 40 - \lambda & 1 \\ -1 & 40 - \lambda \end{vmatrix} = (40 - \lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 80\lambda + 1601 = 0$$

gir
$$\lambda = \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 4 \cdot 1601}}{2} = \frac{80 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{80 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}}{2}$$

$$= \frac{80 \pm 2i}{2} = \begin{cases} 40 + i \\ 40 - i \end{cases}$$

Eigenverdier: $\lambda_1 = 40 + i$ og $\lambda_2 = 40 - i$

Eigenvektorer til $\lambda_1 = 40 + i$

$$\begin{pmatrix} 40 & 1 \\ -1 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (40 + i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ gir } \begin{cases} 40x + y = (40 + i)x & \text{I} \\ -x + 40y = (40 + i)y & \text{II} \end{cases}$$

I sier $y = ix$ (Begge sier)
II sier $-x = iy$ (det samme) Løsn. $\begin{pmatrix} a \\ ia \end{pmatrix}$ $a \neq 0$

Eigenvektorer til $\lambda_2 = 40 - i$

$$\begin{pmatrix} 40 & 1 \\ -1 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (40 - i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ gir } \begin{cases} 40x + y = (40 - i)x & \text{I} \\ -x + 40y = (40 - i)y & \text{II} \end{cases}$$

I sier $y = -ix$ (Begge sier)
II sier $x = iy$ (det samme) Løsn. $\begin{pmatrix} b \\ -ib \end{pmatrix}$ $b \neq 0$

(Oppg. 4 forts.)

$$c) \begin{pmatrix} 2 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ ia \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ -ib \end{pmatrix} \quad \text{gir} \quad \begin{cases} a + b = 2 & \text{I} \\ ia - ib = 80 & \text{II} \end{cases}$$

I sier $b = 2 - a$

II sier da $ia - i(2-a) = 80$, dvs. $2ia - 2i = 80$,

som gir $2ia = 80 + 2i$

$$ia = 40 + i \quad (\text{ganger med } -i \text{ p\u00e5 begge sider})$$

$$a = -40i - i^2 = 1 - 40i$$

I gir da $b = 2 - a = 2 - (1 - 40i) = 1 + 40i$

Konklusjon:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 40i \\ 40 + i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + 40i \\ 40 - i \end{pmatrix} \quad \text{stemmer!}$$

Dette gir

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M^n \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = M^n \left[\begin{pmatrix} 1 - 40i \\ 40 + i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + 40i \\ 40 - i \end{pmatrix} \right]$$

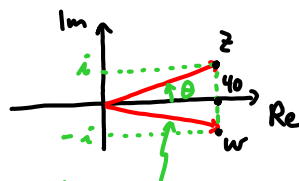
$$= M^n \cdot \begin{pmatrix} 1 - 40i \\ 40 + i \end{pmatrix} + M^n \begin{pmatrix} 1 + 40i \\ 40 - i \end{pmatrix}$$

Eigenvektorer

$$= (40+i)^n \cdot \begin{pmatrix} 1 - 40i \\ 40 + i \end{pmatrix} + (40-i)^n \cdot \begin{pmatrix} 1 + 40i \\ 40 - i \end{pmatrix}$$

Her ser vi at $y_n = (40+i)^{n+1} + (40-i)^{n+1}$ (for $n \geq 0$)

d) Skriver $z = 40 + i$ og $w = 40 - i$ p\u00e5 polar (eksponentiell) form:



$$\text{lengde} \quad \sqrt{40^2 + 1^2} = \sqrt{1601}$$

$$\text{Ser at } \theta = \arccos\left(\frac{40}{\sqrt{1601}}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{\sqrt{1600}}{\sqrt{1601}}\right)$$

$$\text{S\u00e5 } z = \sqrt{1601} e^{i\theta}, \quad w = \sqrt{1601} e^{-i\theta}$$

Innsatt i uttrykket for y_n fra c) gir dette:

$$y_n = z^{n+1} + w^{n+1} = (\sqrt{1601} e^{i\theta})^{n+1} + (\sqrt{1601} e^{-i\theta})^{n+1}$$

$$= (\sqrt{1601})^{n+1} [e^{i\theta(n+1)} + e^{-i\theta(n+1)}]$$

$$= (1601)^{(n+1)/2} \cdot [e^{i(n+1)\theta} + e^{-i(n+1)\theta}]$$

$$\stackrel{\text{Euler}}{=} (1601)^{(n+1)/2} \cdot 2 \cos[(n+1)\theta], \quad \text{der } \theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{1600}}{\sqrt{1601}}\right)$$

$$\begin{aligned} & e^{iu} + e^{-iu} \\ &= \cos u + i \sin u + \cos(-u) + i \sin(-u) \\ &= \cos u + i \sin u + \cos u - i \sin u \end{aligned}$$

(Oppg. 4 forts.)

$$\text{Utryddelse: } y_n = 0 \text{ gir } \cos[(n+1)\theta] = 0$$

Dette skjer når

$$(n+1)\theta = \frac{\pi}{2}, \text{ dvs. } n+1 = \frac{\pi}{2\theta}$$

$$n = \frac{\pi}{2\theta} - 1 \approx 61,8$$

Så i følge modellen er de stemme billene uttryddet etter 62 uker.