Løsningsforslag oblig 2 Mat 1110 vår 2018

Oppgave 1

a) $f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^2+1}$

Dermed passer det å bruke polarkoordinater:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^4+1} \cdot |J|\, d\theta \right] dr$$

$$= 2\pi \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{r}{1+r^4}\, dr$$

$u = r^2$

$\frac{du}{dr} = 2r$

$du = 2r\,dr$

$r=0$ gir $u=0$

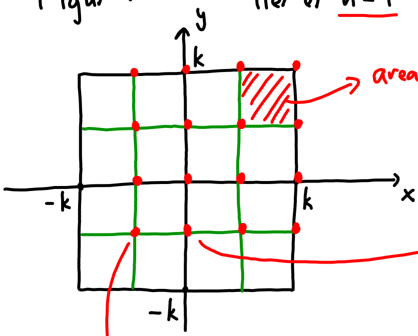
$r=R$ gir $u=R^2$

$$= 2\pi \cdot \lim_{R\to\infty} \int_0^{R^2} \frac{\frac{1}{2}\,du}{1+u^2} = \pi \cdot \lim_{R\to\infty} \int_0^{R^2} \frac{1}{1+u^2}\, du$$

$$= \pi \cdot \lim_{R\to\infty} \Big[\arctan u\Big]_0^{R^2} = \pi \cdot \lim_{R\to\infty} \left[\arctan(R^2) - \arctan 0\right]$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{2}}}$$

b) Figur: Her er $\underline{n=4}$



areal $\dfrac{2k}{n} \cdot \dfrac{2k}{n} = \left(\dfrac{2k}{n}\right)^2 \overset{n=4}{=} \left(\dfrac{2k}{4}\right)^2$

punktet $\left(-k + \dfrac{2k\cdot 2}{n},\ -k + \dfrac{2k\cdot 1}{n}\right)$

punktet $\left(-k + \dfrac{2k\cdot 1}{n},\ -k + \dfrac{2k\cdot 1}{n}\right) \overset{n=4}{=} \left(-k + \dfrac{2k\cdot 1}{4},\ -k + \dfrac{2k\cdot 1}{4}\right)$

Vi ser at Riemannsummen R_n^k er basert på en partisjon av kvadratet $[-k,k]\times[-k,k]$ med maskevidde $\left(\frac{2k}{n}\right)^2$.

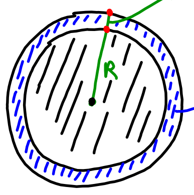
Funksjonsverdiene

$$f\left(-k + \frac{2ki}{n},\ -k + \frac{2kj}{n}\right)$$

er beregnet i punktet som utgjør <u>øvre høyre hjørne</u> av hvert delrektangel (delkvadrat) i partisjonen. Disse punktene er markert med røde prikker på figuren.

(Oppgave 1b og 1c finnes i en egen fil)

Oppgave 2



Vi legger koordinatsystemet (x,y,z) slik at planetens sentrum er i punktet $(0,0,0)$. Massen M av havet er gitt ved

$$M = \iiint_H \frac{\alpha}{R + h(x,y,z)} \, dx\,dy\,dz \,,$$

der $h(x,y,z)$ er høyden over havets bunn i punktet (x,y,z).

Vi bruker kulekoordinater ρ, ϕ, θ. Beskrivelse av havet H:

$$\begin{cases} \rho \in [R, R+D] \\ \phi \in [0, \pi] \\ \theta \in [0, 2\pi) \end{cases} \qquad J = \rho^2 \sin\phi$$

Merk at $R + h(x,y,z)$ er avstanden fra punktet (x,y,z) til origo. Dette blir altså bare ρ når vi skifter til kulekoordinater. Altså:

$$M = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\left[\int_R^{R+D} \frac{\alpha}{\rho} \cdot |J| \, d\rho\right] d\phi\right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\left[\int_R^{R+D} \frac{\alpha}{\rho} \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\rho\right] d\phi\right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\left[\alpha \sin\phi \cdot \tfrac{1}{2}\rho^2\right]_{\rho=R}^{\rho=R+D} d\phi\right] d\theta$$

$$= \frac{\alpha}{2} \cdot \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi} \sin\phi \left[(R+D)^2 - R^2\right] d\phi\right] d\theta$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left[(R+D)^2 - R^2\right] \cdot \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi} \sin\phi \, d\phi\right] d\theta$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left[2DR + D^2\right] \cdot \int_0^{2\pi}\left[-\cos\phi\right]_{\phi=0}^{\phi=\pi} d\theta$$

$$= \frac{\alpha D}{2}\left[D + 2R\right] \cdot \int_0^{2\pi}\left[-(-1) - (-1)\right] d\theta$$

$$= \frac{\alpha D}{2}\left[D + 2R\right] \cdot \int_0^{2\pi} 2 \, d\theta = \frac{\alpha D}{2}(D+2R) \cdot 4\pi = \underline{\underline{2D\pi\alpha(D+2R)}}$$

Oppgave 3

Anta at $a\vec{x} + b\vec{y}$ er en egenvektor for M.
La den tilhørende egenverdien hete α. Vi har da

$$M(a\vec{x} + b\vec{y}) = \alpha(a\vec{x} + b\vec{y})$$
$$= a\alpha\vec{x} + b\alpha\vec{y}$$

Samtidig, siden $\vec{x}$ og $\vec{y}$ er egenvektorer for M med egenverdier henholdsvis λ og μ, har vi

$$M(a\vec{x} + b\vec{y}) = M(a\vec{x}) + M(b\vec{y}) \quad \text{(ved linearitet)}$$
$$= a \cdot M\vec{x} + b \cdot M\vec{y} \quad (\text{— " —})$$
$$= a \cdot \lambda\vec{x} + b \cdot \mu\vec{y} \quad \text{(siden de er egenvektorer).}$$

Setter vi de to uttrykkene for $M(a\vec{x} + b\vec{y})$ lik hverandre, får vi

$$a\alpha\vec{x} + b\alpha\vec{y} = a\lambda\vec{x} + b\mu\vec{y}$$
$$(a\alpha - a\lambda)\vec{x} + (b\alpha - b\mu)\vec{y} = 0$$
$$a(\alpha - \lambda)\vec{x} + b(\alpha - \mu)\vec{y} = 0$$

Fra pensum vet vi at siden $\vec{x}$ og $\vec{y}$ er egenvektorer med forskjellige egenverdier, er de lineært uavhengige. Dette medfører at

$$a(\alpha - \lambda) = 0 \quad \text{og} \quad b(\alpha - \mu) = 0$$

Hvis da $a \neq 0$ og $b \neq 0$, følger at

$$(\alpha - \lambda) = 0 \quad \text{og} \quad (\alpha - \mu) = 0$$

Ergo er $\lambda = \alpha$ og $\mu = \alpha$, så $\lambda = \mu$. Men vi forutsetter $\lambda \neq \mu$.
Selvmotsigelse. Så antakelsen om at $a \neq 0$ og $b \neq 0$ må være gal.
Alltså $a = 0$ eller $b = 0$. $\square$