UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1110 — Kalkulus og lineær algebra
Eksamensdag:	Onsdag 29. mai 2019.
Tid for eksamen:	14:30 – 18:30.
Oppgavesettet er på 7 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Settet består av 10 deloppgaver som alle teller 6 poeng. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1. La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 4/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.
Svar:
Den karakteristiske likningen blir

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= (\lambda - 2/5)(\lambda - 1/5) - 12/25 \\ &= \lambda^2 - \frac{3}{5}\lambda + \frac{2}{25} - \frac{12}{25} = \lambda^2 - \frac{3}{5}\lambda - \frac{2}{5} = 0 \end{aligned}$$

slik at egenverdiene blir

$$\lambda = \frac{\frac{3}{5} \pm \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{8}{5}}}{2} = \frac{\frac{3}{5} \pm \frac{7}{5}}{2} = \frac{3}{10} \pm \frac{7}{10},$$

det vil si $\lambda_1 = -2/5$, $\lambda_2 = 1$.
Vi har at

$$-\frac{2}{5}I - A = \begin{pmatrix} -4/5 & -3/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3/4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Komponentene i en egenvektor for $\lambda_1 = -2/5$ må dermed oppfylle $x = -3y/4$. En generell slik må derfor være på formen $\begin{pmatrix} -3y/4 \\ y \end{pmatrix}$. Setter vi $y = 4$ få vi spesielt egenvektoren $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(Fortsettes på side 2.)

Vi har at

$$I - A = \begin{pmatrix} 3/5 & -3/5 \\ -4/5 & 4/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Komponentene i en egenvektor for $\lambda_2 = 1$ må dermed oppfylle $x = y$. En generell slik må derfor være på formen $\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$. Setter vi $y = 1$ får vi spesielt egenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Skriv vektoren $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 24 \end{pmatrix}$ som en sum av egenvektorer, og regn ut grenseverdien $\lim_{n\to\infty} A^n \boldsymbol{x}_0$.
Svar: Sett $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Disse danner en basis av egenvektorer for $\mathbb{R}^2$. For å skrive $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 24 \end{pmatrix}$ som en lineær kombinasjon av disse radreduserer vi

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -1 \\ 4 & 1 & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -1 \\ 0 & 7/3 & 28 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -1 \\ 0 & 1 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 12 \end{pmatrix},$$

slik at $\boldsymbol{x}_0 = 3\boldsymbol{v}_1 + 12\boldsymbol{v}_2$. Vi får dermed

$$\lim_{n\to\infty} A^n \boldsymbol{x}_0 = \lim_{n\to\infty} A^n(3\boldsymbol{v}_1 + 12\boldsymbol{v}_2) = \lim_{n\to\infty} (3(-2/5)^n \boldsymbol{v}_1 + 12\boldsymbol{v}_2)$$
$$= 12\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 2.

a) Finn volumet avgrenset av paraboloidene $z = 4 - x^2 - y^2$ og $z = 2 + x^2 + y^2$.
Svar: Skjæringen mellom de to paraboloidene finner vi ved å løse

$$4 - x^2 - y^2 = 2 + x^2 + y^2.$$

Dette gir $x^2 + y^2 = 1$, slik at sirkelen om origo med radius 1 er skjæringen mellom dem. Det er videre klart at paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ ligger øverst innenfor det avgrensede området (dette kan verifiseres ved å sette inn $x = y = 0$), slik at høyden på det avgrensede området er $4 - x^2 - y^2 - (2 + x^2 + y^2) = 2 - 2x^2 - 2y^2$. Volumet blir derfor $V = \int\int_D (2 - 2x^2 - 2y^2)\, dx\, dy$, der $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. I polarkoordinater blir integralet

$$\int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (2 - 2r^2) r dr\right] d\theta = \int_0^{2\pi} \left[r^2 - \frac{1}{2} r^4\right]_0^1 d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \pi.$$

(Fortsettes på side 3.)

b) Regn ut linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} \left(x - \frac{1}{3}x^3 - xy^2\right)\, dy$ der $\mathcal{C}$ er enhetssirkelen $x^2 + y^2 = 1$ orientert mot klokka.
Svar: Med $P(x,y) = 0$ og $Q(x,y) = x - \frac{1}{3}x^3 - xy^2$ får vi først at $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ og $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 - x^2 - y^2$. Bruker vi Greens teorem får vi at

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \left(x - \frac{1}{3}x^3 - xy^2\right)\, dy &= \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy \\
&= \int\int_D (1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy \\
&= \frac{1}{2}\int\int_D (2 - 2x^2 - 2y^2)\, dx\, dy \\
&= \frac{1}{2}\pi = \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

det vi brukte svaret fra a). Dette kan også vises direkte ved regning: Med parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ får vi

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \left(x - \frac{1}{3}x^3 - xy^2\right)\, dy &= \int_0^{2\pi} \left(\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t - \cos t \sin^2 t\right) \cos t dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{3}\cos^2 t - \sin^2 t\right) \cos^2 t dt \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} \cos^4 t dt \\
&= \frac{1}{6}\int_0^{2\pi} (1 + \cos(2t))^2 dt \\
&= \frac{1}{6}\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos 2t + \cos^2(2t)) dt \\
&= \frac{1}{6}\int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos 2t + \frac{1}{2}(1 + \cos(4t))\right) dt \\
&= \frac{1}{6}\int_0^{2\pi} (1 + 1/2) dt = \pi/2.
\end{aligned}$$

Oppgave 3. La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 20 & 1 \\ 4 & 3 & 18 & 1 \\ 2 & 3 & 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Regn ut den reduserte trappeformen til A, og skriv ned tre søyler fra A som er lineært uavhengige.

(Fortsettes på side 4.)

Svar: Radreduksjon gir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 20 & 1 \\ 4 & 3 & 18 & 1 \\ 2 & 3 & 12 & 0 \end{pmatrix} \sim^{II-4I,III-4I,IV-2I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim^{II\leftrightarrow IV} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim^{III+II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim^{IV-III} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim^{I-II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

slik at søyle 1,2, og 4 er pivotsøyler. Søyle 1,2, og 4 i A er derfor lineært uavhengige.

b) Finn en basis for $\mathbb{R}^4$, der de tre lineært uavhengige søylene du kom fram til i a) inngår.

Svar: Vi erstatter den tredje søylen i den reduserte trappeformen til A med en vektor som er lineært uavhengig fra de andre, og gjør de inverse

(Fortsettes på side 5.)

radoperasjonene over i motsatt rekkefølge:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim_{I+II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim_{IV+III} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim_{III-II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim_{II\leftrightarrow IV} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim_{II+4I,III+4I,IV+2I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi kan derfor utvide de tre søylene fra A som vi fant i a) med $(0,1,0,0)$ for å få en basis for $\mathbb{R}^4$.

Oppgave 4.

Hva blir konvergensområdet for rekken $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n+1}}{n}$? Finn også et uttrykk for $S(x)$ der rekken konvergerer.

Svar: Forholdstesten gir at $|a_{n+1}/a_n| = |(x-1)^2 n/(n+1)| \to |x-1|^2$, slik at rekken konvergerer absolutt i $(0,2)$. For $x=0$ får vi rekka $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, og for $x=2$ får vi rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Begge disse divergerer, slik at konvergensområdet blir $(0,2)$.

For å regne ut summen av rekka kan vi først dele med $x-1$ på begge sider:

$$\frac{S(x)}{x-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n}.$$

Deriverer vi begge sider får vi at

$$\left(\frac{S(x)}{x-1}\right)' = 2\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^{2n-1} = \frac{2(x-1)}{1-(x-1)^2}.$$

Integrasjon gir så at $\frac{S(x)}{x-1} = -\ln\left|1-(x-1)^2\right| + C$. Setter vi inn $x=1$ ser vi at $C=0$. Vi får dermed at

$$S(x) = -(x-1)\ln\left|1-(x-1)^2\right| = -(x-1)\ln\left(1-(x-1)^2\right).$$

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 5. I denne oppgaven skal vi se på funksjonen

$$f(x,y) = x^2e^x + (3y^2 - 6y)e^x + 1.$$

a) Finn de stasjonære punktene til f.
Svar: Vi har at

$$\nabla f = \begin{pmatrix} (x^2 + 2x + 3y^2 - 6y)e^x \\ (6y - 6)e^x \end{pmatrix}.$$

Setter vi dette lik 0 følger det fra den andre likningen at $y = 1$. Setter vi dette inn i den første likningen får vi at $x^2 + 2x - 3 = 0$, som gir at $x = 1$ eller $x = -3$. Dermed blir de stasjonære punktene $(1, 1)$ og $(-3, 1)$.

b) Avgjør om de stasjonære punktene er sadelpunkter, lokale minimumspunkter, eller lokale maksimumspunkter.
Svar: Hessematrisen til f er

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} (x^2 + 2x + 3y^2 - 6y + 2x + 2)e^x & (6y - 6)e^x \\ (6y - 6)e^x & 6e^x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x^2 + 4x + 3y^2 - 6y + 2)e^x & (6y - 6)e^x \\ (6y - 6)e^x & 6e^x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

For punktet $(1, 1)$ blir Hessematrisen $e\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, som har egenverdiene $4e$ og $6e$. Derfor er $(1, 1)$ et lokalt minimumspunkt.
For punktet $(-3, 1)$ blir Hessematrisen $e^{-3}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, som har egenverdiene $-4e^{-3}$ og $6e^{-3}$. Siden disse har motsatt fortegn er $(-3, 1)$ et sadelpunkt.

c) Bruk Lagrange's multiplikatormetode til å vise at lokale ekstremalpunkter for f under betingelsen $y = 3 - 2x$ må være skjæringspunkter mellom linjen $y = 3 - 2x$ og ellipsen $\frac{(x+1)^2}{4^2} + \frac{(y-3)^2}{(4/\sqrt{3})^2} = 1$. Forklar videre hvorfor f må ha et globalt minimum under denne betingelsen (du trenger ikke skrive opp selve minimumspunktet). Har f et globalt maksimum under den samme betingelsen?
Hint: Verifiser at $f(1, 1) < 1$, og at $\lim_{x\to\infty} f(x, 3 - 2x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x, 3 - 2x) = 1$. Dette kan brukes til å vise at f må ha et globalt minimum under den gitte betingelsen.
Svar: Vi setter $g(x, y) = 2x + y - 3$. Fra læreboka følger det at, i et lokalt ekstremalpunkt for f under betingelsen $g(x, y) = 0$, så er enten $\nabla g = 0$, eller $\nabla f = \lambda \nabla g$.
Siden $\nabla g = (2, 1) \neq \mathbf{0}$ får vi ingen kandidater fra førstnevnte. Lokale ekstremalpunkter må derfor tilfredsstille $\nabla f = \lambda \nabla g$, som kan skrives

$$\begin{aligned} (x^2 + 2x + 3y^2 - 6y)e^x &= 2\lambda \\ (6y - 6)e^x &= \lambda. \end{aligned}$$

Eliminerer vi λ får vi at $x^2 + 2x + 3y^2 - 6y = 2(6y - 6)$, som kan skrives som $x^2 + 2x + 3y^2 - 18y = -12$. Fullfører vi kvadratene får vi at $(x + 1)^2 + 3(y - 3)^2 = 16$, som er ellipsen gitt i oppgaven. Dette beviser at lokale ekstrmalpunkter under den gitte betingelsen er skjæringspunkter mellom linjen og ellipsen.

(Fortsettes på side 7.)

Vi har at $g(1,1) = 0$, og $f(1,1) = e^1 - 3e^1 + 1 = 1 - 2e < 1$, slik at f antar verdier mindre enn 1 under den gitte betingelsen. Når $x \to \infty$ vil $x^2e^x \to \infty$. Videre vil da også $y = 3 - 2x \to -\infty$, og da vil $(3y^2 - 6y)e^x \to \infty$ også. Det følger at $\lim_{x\to\infty} f(x, 3 - 2x) = \infty$. Det følger at f ikke ha noe globalt maksimum under den gitte betingelsen.
Når $x \to -\infty$ så vil e^x gå raskere mot 0 enn potenser av x, slik at $\lim_{x\to-\infty} f(x, 3 - 2x) = 1$.
Det følger at det finnes et intervall $[-K, K]$ slik at $f(x, 3 - 2x) > 1 - \epsilon > f(1, 1)$ utenfor dette intervallet. Siden $f(x, 3 - 2x)$ har et globalt minimum på intervallet $[-K, K]$, så følger at dette også er et globalt minimum for f under den gitte betingelsen.
Man kan bruke samme argument som over til å vise at $(1, 1)$ også er et globalt minimum for f, uten noen betingelse. Siden $(1, 1)$ ligger på linjen, så må det også være globalt minimum for f, med den gitte betingelsen.

Lykke til!