MAT1110: Obligatorisk oppgave 2

Innleveringsfrist: 11/4-2019, kl. 14:30

Oppgave 1 Vi skal først se på en anvendelse av egenverdier og egenvektorer.
a) Et leiebilfirma leier ut biler i tre forskjellige byer A, B, og C. Vi antar at alle biler leies for en dag.
Av de bilene som leies ut i by A returneres 40% til by A, 30% til by B, og 30% til by C.
Av de bilene som leies ut i by B returneres 30% til by A, 50% til by B, og 20% til by C.
Av de bilene som leies ut i by C returneres 30% til by A, 20% til by B, og 50% til by C.
Vis at, hvis x, y, og z er antall utleiebiler i by A, B, og C, så vil antall leiebiler i de respektive byene dagen etter være $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, der $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$.
Hint: se starten av eksempel 4.11.2, hvis du vil se et annet eksempel på hvordan man setter opp en slik matrise.

b) Vis at $\lambda = 1$ er en egenverdi for A, og finn en tilhørende egenvektor.

c) Bruk kommandoen `eig` i Matlab, eller `linalg.eig` i `numpy` i Python, til å finne de andre egenverdiene (du trenger ikke legge ved koden for dette, bare resultatet fra kommandoen). Fra det som returneres, gjett på tilhørende egenvektorer, og verifiser om de er egenvektorer ved å sjekke ved regning om $A\mathbf{x}$ er lik $\lambda\mathbf{x}$.

d) Anta nå at det til å begynne med er 30 leiebiler i by A, 60 leiebiler i by B, og 30 leiebiler i by C. Skriv vektoren $(30, 60, 30)$ som en lineær kombinasjon av egenvektorene du har funnet, og finn et uttrykk for antall leiebiler i byene etter n dager. Hvordan vil bilene fordele seg når tiden går mot uendelig?

e) Plott antall biler i by A, B ,og C i samme koordinatsystem. I plottet ditt skal x-aksen svare til antall dager. Du trenger bare legge ved plottet, ikke koden som genererer selve plottet.

Oppgave 2 I eksempel 6.4.3 regnet vi ut overflatearealet til en torus. Vi skal nå i stedet regne ut volumet av torusen. Det er rett fram å finne følgende parametrisering av området torusen avgrenser, på samme måte som vi parametriserte torusflaten:

$$\mathbf{r}(u, v, w) = (R + w\cos u)\cos v\,\mathbf{i} + (R + w\cos u)\sin v\,\mathbf{j} + w\sin u\,\mathbf{k},$$

der $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$, $0 \leq w \leq r$, og der R er den ytre radien i torusen, r er den indre radien (spesielt er $r \leq R$).

a) Vis at absoluttverdien til Jacobideterminanten er

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = w(R + w\cos u).$$

b) Finn volumet av torusen. Hvis du ikke kom i mål på a) så skal du uansett kunne komme fram til et uttrykk for volumet ved å sette opp et trippelintegral som bruker Jacobideterminanten oppgitt i a).