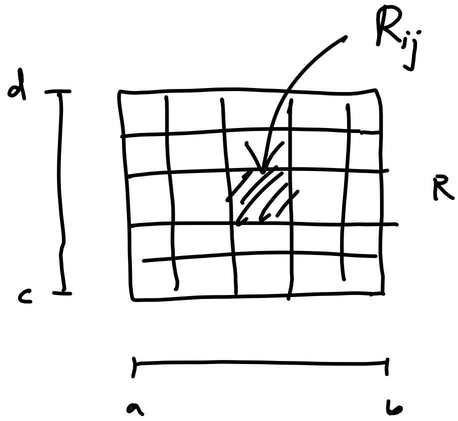
Forrige forelesning:

$R = [a,b] \times [c,d]$ rektangel

$f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ funksjon i to variable

$\leadsto$ definerte $\displaystyle\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$

ved å se på inf / sup av f over små rektangler R_{ij} i en partisjon Π av R.



Kan evaluere integralet som

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

<u>Eks</u> $\displaystyle\iint_{[0,\pi/2]\times[0,2]} y^2 \sin x \,dx\,dy$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \underline{y^2} \sin x \,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \frac{y^3}{3} \sin x \Big]_0^2 dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{8}{3} \sin x \,dx = \underline{\frac{8}{3}}$$

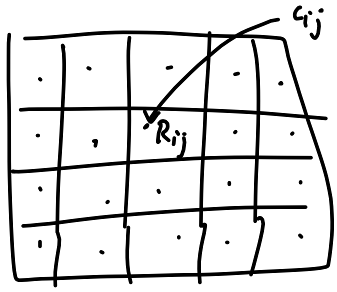
Alternativ definisjon (Riemann summer)

$R = [a,b] \times [c,d]$

Π partisjon av R

Et <u>utplukk</u> $\mathcal{U}$ av Π er en mengde punkter c_{ij} $\quad i = 1 \ldots n,\ j = 1 \ldots m$

s.a $\quad \underline{c_{ij}} \in R_{ij} \quad (= [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j])$



⇝ definer

$$R(\Pi, \mathcal{U}) := \sum_{i,j} \underbrace{f(c_{ij})\ |R_{ij}|}$$

≈ volumet av området under grafen til f over R_{ij}.

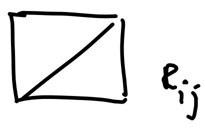
← "Riemann summen til f over $\mathcal{U}$"

Ser at

$$\underset{(\inf)}{N(\Pi)} \leq R(\Pi, \mathcal{U}) \leq \underset{(\sup)}{Ø(\Pi)}$$

Sett $\quad |\Pi| = \text{maskevidden til } \Pi := \max_{i,j} \left\{ \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2} \right\}$

<u>Setning</u> Anta at Π_n er en følge partisjoner av R s.a $|\Pi_n| \longrightarrow 0$



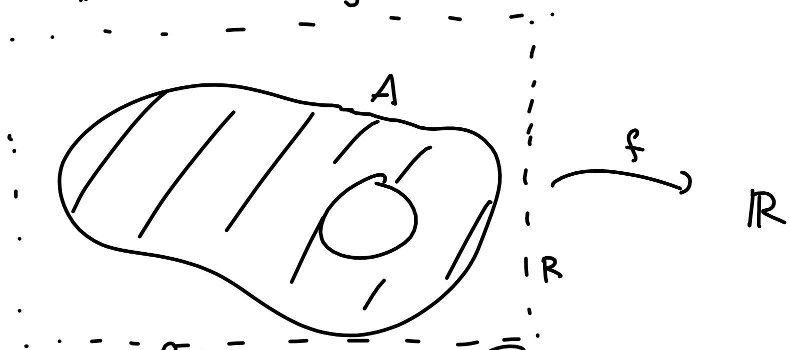
La $\mathcal{U}_n$ være et utplukk av Π_n.

Da: For hver $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ integrerbar, så har vi

$$\iint_R f(x,y)\, dxdy = \lim_{n \to \infty} R(\Pi_n, \mathcal{U}_n).$$

6.2 Dobbelt integraler over begrensede områder

Gitt $A \subset \mathbb{R}^2$, et begrenset område
$f: A \to \mathbb{R}$ kontinuerlig.



Hvordan definere $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$?

La $f_A : R \to \mathbb{R}$ være definert ved

$$f_A(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in A \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$R \supset A \qquad R = [a,b] \times [c,d].$

Vi definerer

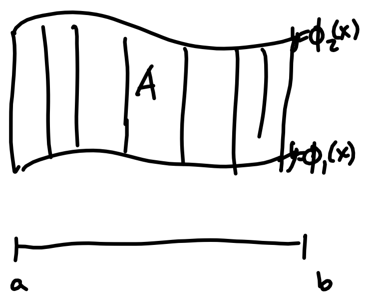
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy := \iint_R f_A(x,y)\,dx\,dy$$

(oppgave: sjekk at dette ikke avhenger av valget av R)

To typer områder:

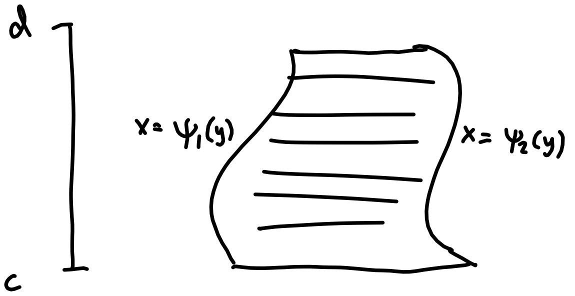
<u>Type I</u> $\quad A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x) \end{array} \right\}$

$\phi_1, \phi_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
kontinuerlige, med $\phi_1 \leq \phi_2$



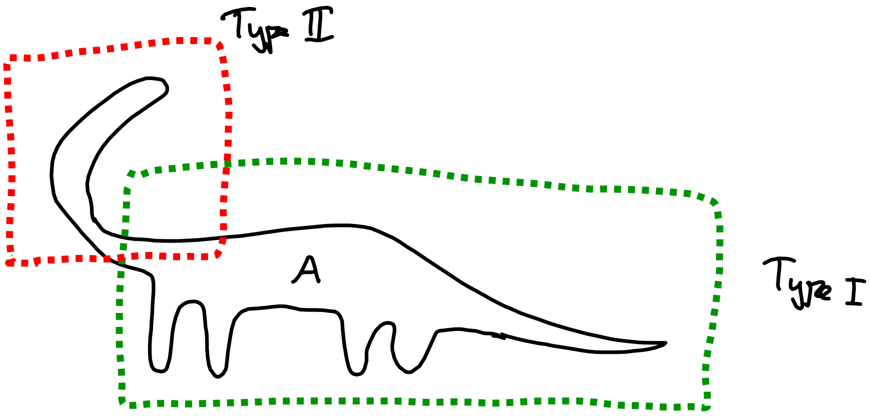
$$\rightsquigarrow \quad \iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx .$$

<u>Type II</u> $\quad A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} c \leq y \leq d \\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \end{array} \right\}$



$$\rightsquigarrow \quad \iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Kan ofte stykke opp generelle områder i type I og II områder:



Merk: arealet til $A = \iint_A 1 \, dx\, dy = \iint_R \mathbb{1}_A \, dx\, dy$

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Dette gir kun mening dersom $\mathbb{1}_A$ er integrerbar!

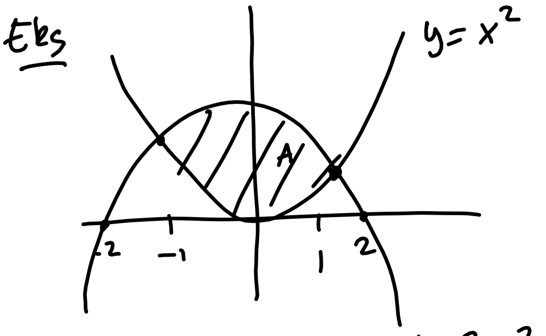
Defn En begrenset mengde $A \subset \mathbb{R}^2$ kalles Jordan-målbar dersom $\mathbb{1}_A$ er integrerbar.

Setning 6.6.4 La $A \subset \mathbb{R}^2$ være et område som kan stykkes opp i endelig mange type I og type II områder.
Da er A Jordan-målbar.

Teorem 6.6.6 $A \subset \mathbb{R}^2$ begrenset, Jordan-målbar mengde.
$\leadsto$ enhver kontinuerlig funksjon $f : A \to \mathbb{R}$ er integrerbar.
$\left(\Leftrightarrow \iint_A f(x,y) \, dx\, dy \text{ eksisterer} \right)$

$\therefore$ Vi kan integrere alle kontinuerlige funksjoner over "tilstrekkelig pene" mengder $A \subset \mathbb{R}^2$.

Eks



type I.

$f(x,y) = y$

Finn $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$.

$A = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{l} -1 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le 2 - x^2 \end{array} \right\}$

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{x^2}^{2-x^2} y \, dy \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} y^2 \Big]_{x^2}^{2-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (2-x^2)^2 - (x^2)^2 \, dx$$

jevn funksjon

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \underline{4 - 4x^2} \, dx = \int_{0}^{1} 4 - 4x^2 \, dx$$

$$= 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

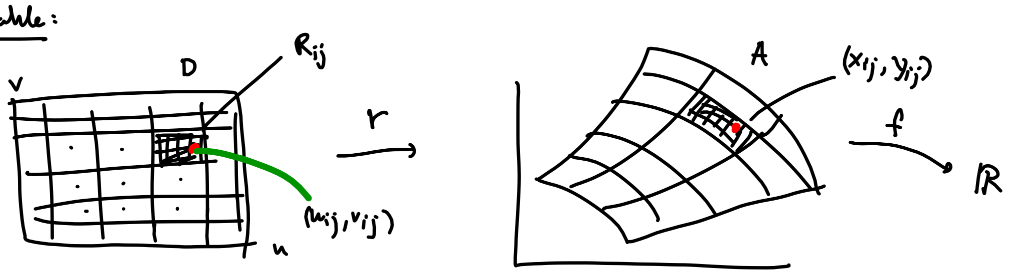
6.7 Skifte av variabel: dobbeltintegraler

Recap: Én variabel:

$$[a,b] \xrightarrow{h} [c,d] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_a^b f(h(t))\,h'(t)\,dt$$

To variable:



Skal evaluere $\iint_A f(x,y)\,dxdy$ som et integral over D.

Velg en partisjon av D og et utplukk $\mathcal{U} = \{(u_{ij}, v_{ij})\}_{\substack{i=1..n\\ j=1..m}}$

$\rightsquigarrow$ partisjon av $A = r(D)$ og et utplukk $V = \{(x_{ij}, y_{ij})\}_{\substack{i=1..n\\ j=1..m}}$

$$x_{ij} = x(u_{ij}, v_{ij})$$
$$y_{ij} = y(u_{ij}, v_{ij})$$

For $\mathcal{U}$ fin nok vil vi ha

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy \approx \sum_{i,j} f(x_{ij}, y_{ij})\,|A_{ij}|$$

arealet til $A_{ij} = r(R_{ij})$

?

Tilsvarende,

$$\iint_D g(u,v)\,dudv \approx \sum_{i,j} \underbrace{g(u_{ij}, v_{ij})}_{= f(x_{ij}, y_{ij})}\,|R_{ij}|$$

$$g(u,v) = f(r(u,v)) = f(x(u,v), y(u,v))$$

Arealene $|A_{ij}|$ og $|R_{ij}|$ er relatert ved

$$|A_{ij}| \approx |\det r'(u,v)| \cdot |R_{ij}|$$

determinanten til $r'(u,v)$ er skaleringsfaktoren til arealene.

der

$$r'(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

er jacobimatrisen til r.

Derfor:

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy \approx \sum_{i,j} f(x_{ij}, y_{ij})\,|A_{ij}|$$

$$\approx \sum_{i,j} g(u_{ij}, v_{ij})\,|\det r'(u,v)| \cdot |R_{ij}|$$

= Riemann sum for integralet

$$\iint_D g(u,v)\,|\det r'(u,v)|\,du\,dv$$

Teorem 6.7.1 $U \subset \mathbb{R}^2$ åpen begrenset
$r: U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 1-1, kontinuerlig deriverbar s.a $\det r'(u,v) \neq 0$ for alle $u,v \in U$

Dersom $D \subset U$ er en lukket Jordanmålbar mengde og $A = r(D)$.

$$\rightsquigarrow \boxed{\iint_A f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(r(u,v)) \cdot |\det r'(u,v)|\,du\,dv}$$

Notasjon: $r(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v))$

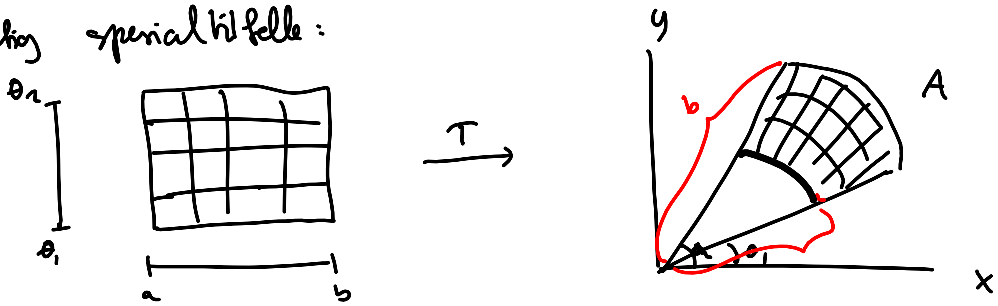
Skriv
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det r'(u,v) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

$\rightsquigarrow$ formelen blir:
$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(x(u,v), y(u,v))\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv$$

Dette likner på formelen
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{h(a)}^{h(b)} f(h(t))\,\frac{dh}{dt}\,dt$$

Polarkoordinater

Viktig spesialtilfelle:



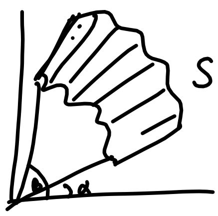
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

$$T'(\theta, r) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta & \cos\theta \\ r\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad |\det T'(\theta, r)| = |-r\sin\theta \cdot \sin\theta - r\cos\theta\cdot\cos\theta|$$
$$= r\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = r.$$

Setning La $S \subset \mathbb{R}^2$ være beskrevet av

$$\alpha \leq \theta \leq \beta$$
$$\phi_1(\theta) \leq r \leq \phi_2(\theta)$$



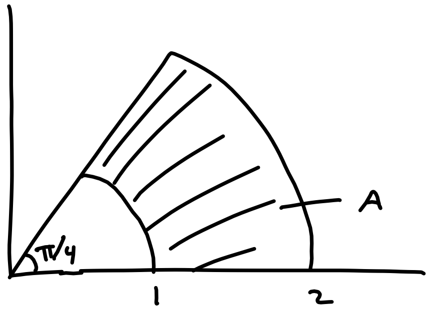
ϕ_1, ϕ_2 kontinuerlige funksjoner på $[\alpha, \beta]$.
$\phi_1 \leq \phi_2$.

Da er

$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r \, dr\, d\theta$$

La A være følgende sirkel sektor :

<u>Eks</u>



$f(x,y) = x^2 y$

$$\Rightarrow \iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/4}\int_1^2 f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4}\int_1^2 r^2\cos^2\theta\ r\sin\theta\cdot r\ dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4}\int_1^2 r^4 \cos^2\theta \sin\theta\ dr\,d\theta$$

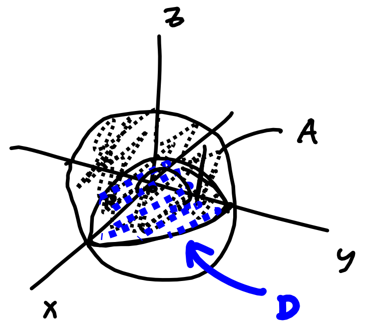
$$= \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \sin\theta\cdot \frac{r^5}{5}\Big|_1^2\, d\theta$$

$$= \left(\frac{2^5-1}{5}\right)\int_0^{\pi/4}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta \qquad u = \cos\theta$$

$$= \underline{\left(\frac{2^5-1}{5}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 1\right]}$$

Eks Regn ut volumet avgrenset av kuleskallet med radius R og (x,y)-planet i $\mathbb{R}^3$

kula: $x^2+y^2+z^2 = R^2$ ← høyden

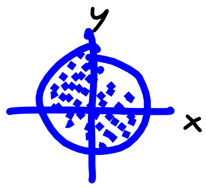


$\rightsquigarrow$ volumet $= \iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dx\, dy$

polarkoordinater $\rightsquigarrow$ $= \int_0^{2\pi}\int_0^R \sqrt{R^2-r^2} \cdot r\, dr\, d\theta$

$u = R^2 - r^2$
$du = -2r\, dr$

$= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int \sqrt{u}\, du\, d\theta$



$= -\frac{1}{\cancel{2}} \int_0^{2\pi} -\frac{\cancel{2}}{3} (R^2-r^2)^{3/2} \Big|_0^R d\theta$

$= \underline{\frac{2\pi}{3} R^3}$