4.10 Recap: Egenvektorer og egenverdier

A $n \times n$ matrise

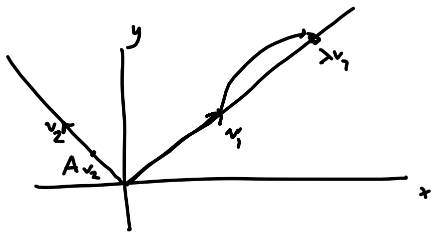
Motivasjon: Finn en basis for $\mathbb{R}^n$ s.a. transformasjonen A er lett å forstå.

- $v \neq 0$ er en egenvektor med tilhørende egenverdi λ dersom

$$\underline{A \cdot v = \lambda \cdot v}$$

$\Leftrightarrow (\lambda I - A)v = 0$

$\therefore$ v er en nullvektor for $\lambda I - A$



- Hvordan finne v og λ?

  (1) Løs likningen $\det(\lambda I - A) = 0$ ← "den karakteristiske likningen til A"

  (2) For hver løsning i (1), radreduser $\lambda I - A$ og finn nullvektorene. ⇝ disse blir egenvektorene.

MATLAB / Python: A matrise

$[u,v] = \mathrm{eig}(A)$

u matrise med egenvektorer

v diagonal matrise med egenverdier

Disse er nyttige, da vi i anvendelser ofte ønsker å regne ut $A^m x$ for $x \in \mathbb{R}^n$ og store m.

Dersom $x = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$ v_k egenvektorer $a_i \in \mathbb{R}$

$\rightarrow A^m x = a_1 \cdot \lambda_1^m v_1 + \dots + a_k \lambda_k^m v_k$

← mye lettere å regne ut.

A $n \times n$ matrise

- $v \in \mathbb{R}^n$ er en nullvektor dersom $Av = 0$.
- $\{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = 0\}$ kalles nullrommet til A.

<u>Eks</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 2 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(\ ) = (\lambda-1)\lambda - 1.2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2)$$

$\lambda_1 = -1$: $\lambda I - A = \begin{pmatrix} -1-1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Nullvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2$: $\lambda I - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Nullvektor: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

<u>Merk</u>: Noen matriser har færre enn n egenverdier.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 2 \\ -2 & \lambda+3 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \det(\lambda I - A) = \ldots = (\lambda+1)^2$.

$\rightsquigarrow$ dobbel rot!

$\lambda = -1$: $\lambda I - A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ bare én egenvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>Setning</u> <u>4.10.4</u> La A være en $n \times n$ matrise og anta at $v_1 .. v_k$ er egenvektorer med <u>forskjellige</u> <u>egenverdier</u> $\left(\lambda_i \neq \lambda_j \atop i \neq j\right)$

Da er $v_1 .. v_k$ lineært uavhengige.

$\therefore$ Spesielt, dersom A har n <u>forskjellige</u> egenverdier, så finnes en basis for $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer for A.

← "ideelt tilfelle"

<u>Reelle matriser</u>

<u>Setning</u> <u>4.10.8</u> A reell $n \times n$ matrise
v kompleks egenvektor med egenverdi λ.

Da er også $\bar{v}$ en egenvektor, med egenverdi $\bar{\lambda}$.

<u>eks</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$

$\rightsquigarrow$ røtter $\lambda_1 = 1 + 2i \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1 - 2i . \longleftrightarrow \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>Bevis Setning</u>:

$$A\bar{v} \underset{\substack{\uparrow \\ A \text{ reell}: A = \bar{A}}}{=} \bar{A}\bar{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v} \quad \rightsquigarrow \bar{v} \text{ egenvektor} \quad \square$$

Setningen "halverer arbeidet" med å finne egenverdier / egenvektorer for reelle matriser.

Symmetriske matriser

A er symmetrisk dersom $A = A^T$ eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Teorem (4.10.10) A symmetrisk $n \times n$ matrise.

$\rightsquigarrow$ A har n reelle egenverdier $\lambda_1 \,..\, \lambda_n$ med tilhørende egenvektorer $v_1 \ldots v_n$, og disse danner en basis for $\mathbb{R}^n$.

Merk: Flere av egenverdiene λ_i kan være like.

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\lambda = 1$ eneste egenverdi.

Eks $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$\lambda_1 = 1$: $\lambda I - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ nullvektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -1$: $\lambda I - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ egenvektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Diagonalisering

Setning 4.10.12

A nn matrise

$v_1 \ldots v_n$ basis av egenvektorer

$\lambda_1 \ldots \lambda_n$ tilhørende egenverdier

Definer matrisen

$$P = [v_1, v_2, \ldots, v_n] \leftarrow \text{matrisen med } v_i \text{ som kolonnevektorer}$$

$\rightsquigarrow$ Da er P inverterbar, og

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} =: D$$

$\therefore$ A er konjugert med en diagonal matrise.

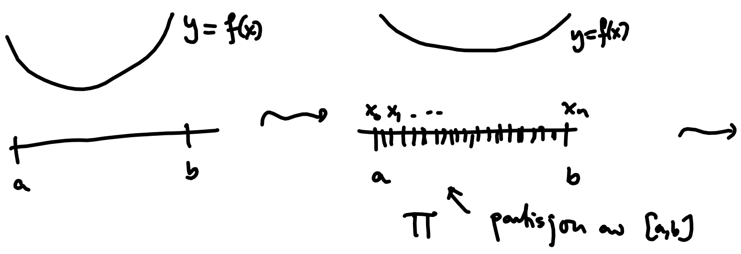
Dette er nyttig fordi

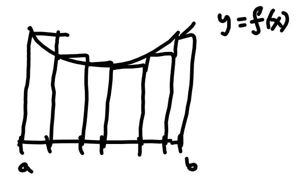
$$A^m = (PDP^{-1})^m = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1})$$
$$= PD^mP^{-1}$$

$$D^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \lambda_2^m & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

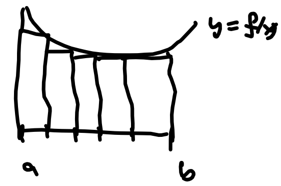
6.1 Multippel integrasjon

Husk: $f(x)$ en funksjon i én variabel.





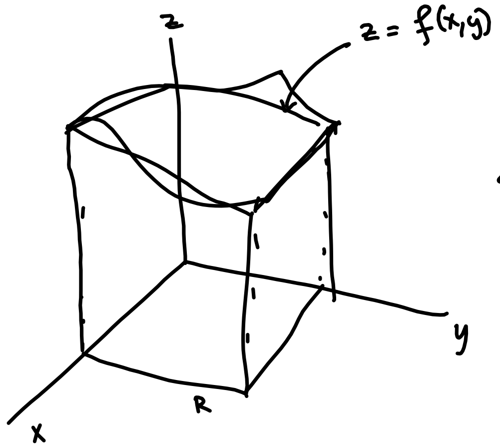
$Ø(\Pi)$ = øvre trappesum



$N(\Pi)$ = nedre trappesum

f er integrerbar derom $Ø(\Pi) \to N(\Pi)$ for finere og finere Π.

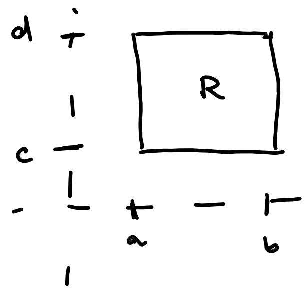
$f(x,y)$ funksjon av to variable $\rightsquigarrow$ Skal definere $\iint f(x,y)\,dx\,dy$



← Integralet burde være volumet av "boksen".

Notasjon • $R = [a,b] \times [c,d]$

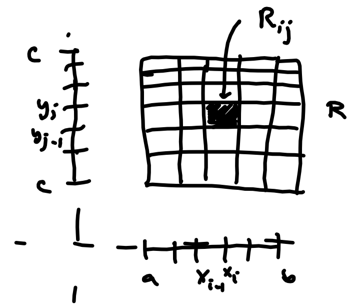
$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{matrix} \right\}$$



• En partisjon Π av R er en oppdeling

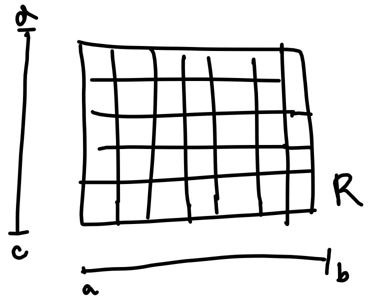
$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ av $[a,b]$

$c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$ av $[c,d]$

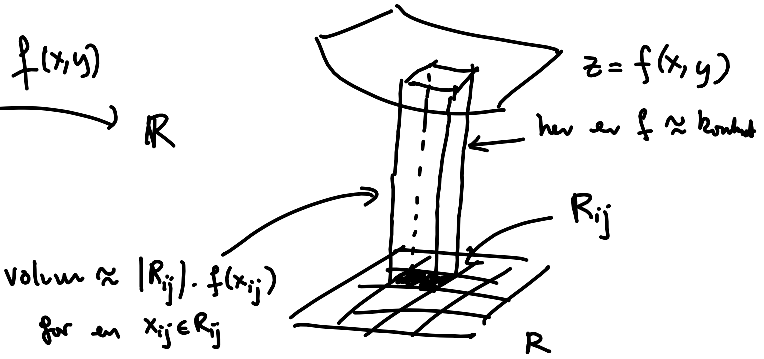


• Sett $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$

$|R_{ij}|$ = arealet til R_{ij} $= (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$



$\xrightarrow{f(x,y)} \mathbb{R}$



Skal gjøre dette presist:

$f: R \longrightarrow \mathbb{R}$ funksjon.

Definerer
$$m_{ij} = \inf \{ f(x,y) \mid (x,y) \in R_{ij} \}$$

$$M_{ij} = \sup \{ f(x,y) \mid (x,y) \in R_{ij} \}$$

Defn Nedre trappesum:
$$N(\Pi) = \sum_{i,j} m_{ij} \, |R_{ij}| \left(= \sum_{i,j} m_{ij} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \right)$$

summer over alle $i = 1 .. n$, $j = 1 .. m$

Øvre trappesum:
$$Ø(\Pi) = \sum_{i,j} \underbrace{M_{ij} \, |R_{ij}|}$$

volum $R_{ij} \times M_{ij} \approx$ volum under grafen over R_{ij}.

Nedreintegralet:
$$\underline{\iint} f(x,y)\,dxdy = \sup \{ N(\Pi) \mid \Pi \text{ partisjon av } R \}$$

Øvreintegralet:
$$\overline{\iint} f(x,y)\,dxdy = \inf \{ Ø(\Pi) \mid \Pi \text{ partisjon av } R \}$$

Defn $f: R \longrightarrow \mathbb{R}$ er <u>integrerbar</u> dersom
$$\underline{\iint} f(x,y)\,dxdy = \overline{\iint} f(x,y)\,dxdy$$

og vi setter
$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \underline{\iint} f(x,y)\,dxdy = \overline{\iint} f(x,y)\,dxdy.$$

<u>Teorem 6.1.5</u> ("kontinuerlig $\Rightarrow$ integrerbar")

La $R = [a,b] \times [c,d]$ og la f være en kontinuerlig funksjon på R. Da er f integrerbar.

<u>Eks</u> Det finnes ikke-integrerbare funksjoner: $R = [0,1] \times [0,1]$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

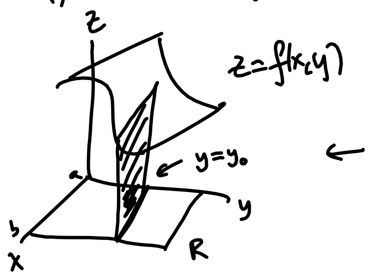
$m_{ij} = 0$

$$N(\Pi) = \sum_{i,j} m_{ij} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = 0$$

$$\emptyset(\Pi) = \sum_{i,j} M_{ij} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \underset{M_{ij}=1}{=} \sum_{i,j} 1 \cdot (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = |R| = 1.$$

Dette gjelder for <u>alle</u> partisjoner $\Rightarrow$ $f(x,y)$ er ikke integrerbar.

Hvordan regne ut et dobbeltintegral?



$\leftarrow$ Arealet til det skraverte området

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx \qquad \text{(funksjon av } y\text{)}$$

$\rightsquigarrow$ volumet er $V = \int_c^d g(y)\,dy$.

<u>Teorem 6.1.9</u> $f: R \to \mathbb{R}$ integrerbar (f.eks kontinuerlig)

Da er

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

__Eks__

$$R = [0,1] \times [0,1]$$

$$f(x,y) = x^2 - y^3$$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^2 - y^3 \, dx \right) dy$$

deom

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} - y^3 x \Big|_0^1 \right) dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3} - y^3 \, dy$$

$$= \frac{y}{3} - \frac{y^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

__Merk:__

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 x^2 - y^3 \, dy \right) dx = \int_0^1 x^2 y - \frac{y^4}{4} \Big|_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 x^2 - \frac{1}{4} \, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{4}x \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{12}.$$