Velkommen til MAT1110!

Kap.1 : Vektorer og matriser

Kap.2 : Funksjoner fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$

Kap.3 : Kurver og flater (programmering)

Kap.4 : Lineær algebra (programmering)

Kap.6 : Multippel integrasjon

Kap.5 : Iterasjon og optimering

Kap.12 : Kalkulus : Rekker.

Seksjon 1.9

Vil jobbe mye i $\mathbb{R}^n$.
Interessert i funksjoner / avbildninger fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$

Regel som for hver $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tilordner en $\vec{F}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$

(skriver $\vec{F}(\vec{x})$ når $m \geq 2$, $f(x)$ når $m = 1$)

Hvis A er en $m \times n$-matrise, så er $\vec{T}(\vec{x}) = A\vec{x}$ en avbildning fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$.

Eks. 1 La $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Da er $\vec{T}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 \\ 4+2 \\ 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

Husk at standardbasisvektorene i $\mathbb{R}^2$ er $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vi får: $\vec{T}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 \\ 4+0 \\ 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ (første søyle i A)

$\vec{T}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 \\ 0+1 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (andre søyle i A)

Observasjon 1: En matrise avbilder standardbasisvektorene på sine søyler.

Observasjon 2: $\vec{T}$ oppfyller $\vec{T}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\vec{T}(\vec{e}_1) + \cdots + x_n\vec{T}(\vec{e}_n)$

<u>Definisjon 1.9.1</u> $\vec{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kalles en lineæravbildning hvis

(i) $\vec{T}(c\vec{x}) = c\,\vec{T}(\vec{x})$

(ii) $\vec{T}(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{T}(\vec{x}) + \vec{T}(\vec{y})$

for alle $c \in \mathbb{R}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$\vec{T}(\vec{x}) = A\vec{x}$ er alltid lineær (følger fra regneregler for matriser)

<u>Setning 1.9.5</u> (omvendt, enhver lineær avbildning kan uttrykkes slik ved matrise A:)

Hvis $\vec{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er lineær, så finnes en $m\times n$-matrise A slik at $\vec{T}(\vec{x}) = A\vec{x}$, alle $x \in \mathbb{R}^n$.

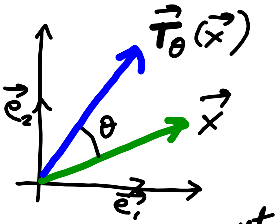
<u>Bevis:</u>

$$\vec{T}(\vec{x}) = \vec{T}(x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n) \overset{(ii)}{=} \vec{T}(x_1\vec{e}_1) + \dots + \vec{T}(x_n\vec{e}_n) \overset{(i)}{=} x_1 T(\vec{e}_1) + \dots + x_n \vec{T}(\vec{e}_n) = A\vec{x},$$

der A er matrisen med søyle nr. i lik $T(\vec{e}_i)$

Vi finner altså matrisen til $\vec{T}$ ved å se på hva den gjør med standardbasisvektorene.

Eksempel 1.9.7 La $\vec{T}_\theta$ være avbildningen som dreier en vektor i planet med vinkel θ.



Vi regner ut

$$\vec{T}_\theta(\vec{e}_1) = \vec{T}_\theta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\vec{T}_\theta(\vec{e}_2) = \vec{T}_\theta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \vec{T}_\theta\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\theta+\frac{\pi}{2})\\ \sin(\theta+\frac{\pi}{2})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

Hvis $\vec{T}_\theta$ er lineær, så må da $\underline{A = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}}$

Viser at $\vec{T}_\theta$ er lineær:

La $\vec{x}\in\mathbb{R}^2$. $\vec{x}$ kan skrives $\begin{pmatrix}r\cos\alpha\\ r\sin\alpha\end{pmatrix}$

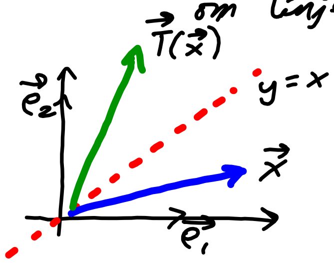
Vi får da: $\vec{T}_\theta(\vec{x}) = \vec{T}_\theta\begin{pmatrix}r\cos\alpha\\ r\sin\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\cos(\theta+\alpha)\\ r\sin(\theta+\alpha)\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}\underline{r}\cos\theta\,\underline{\cos\alpha}\,\underline{-r}\sin\theta\,\underline{\sin\alpha}\\ \underline{r}\sin\theta\,\underline{\cos\alpha} + \underline{r}\cos\theta\,\underline{\sin\alpha}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\cos\alpha\\ r\sin\alpha\end{pmatrix}$$

Har da funnet en A, og da må $\vec{T}_\theta$ være lineær.

Eksempel: Finn matrisen til lineæravbildningen som speiler $\vec{x}$ om linjen $y = x$.



$$\vec{T}(\vec{e}_1) = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{T}(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Derfor er $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Seksjon 1.9.1 : Egenverdier :

Definisjon 1.9.8 $\vec{x}$ kalles en egenvektor for $\vec{T}$ hvis det finnes en λ s.a. $T(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$. Da kalles λ for den tilhørende egenverdien.

Seksjon 1.10 Affine avbildninger

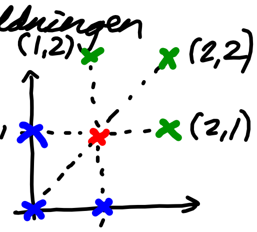
> En funksjon $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kalles en affin avbildning hvis det finnes en $m \times n$ matrise A og en $\vec{c} \in \mathbb{R}^m$ slik at
> $$\vec{F}(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{c} \quad \text{for alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

$\vec{F}$ er lineær hvis også $\vec{c} = \vec{0}$ ($\vec{F}$ lineær $\Rightarrow \vec{F}(\vec{0}) = \vec{0}$)

$\vec{c}$ kalles for konstantleddet til $\vec{F}$.

A kalles for matrisen til $\vec{F}$

Eksempel: Hva er matrisen/konstantleddet til avbildningen som speiler om punktet $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$?



Svar: Vi har at $\vec{F}(\vec{0}) = A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \vec{c} = \vec{c} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

Vi har at $\vec{F}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\vec{F}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$$\vec{F}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \vec{c} = \begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-2\\2-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{F}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \vec{c} = \begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-2\\1-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

Derfor: $A = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$,

slik at $\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-x_1\\2-x_2\end{pmatrix}$