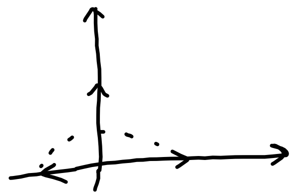
I dag: 1.10 og 2.7
pensum midtveis
Fellesorakel
Bytte gruppe
Regnelørdager
Canvas

Quiz spørsmål 1:

Avbildningen som speiler punkter om y-aksen.

$\vec{T}(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1, \qquad \vec{T}(\vec{e}_2) = \vec{e}_2$



Derfor er $A = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix}}_{\vec{T}(\vec{e}_1)} & \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}}_{\vec{T}(\vec{e}_2)} \end{pmatrix}$

Alternativ 1: $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

siden $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ikke peker i samme retning som $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, så er ikke $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en egenvektor (dvs. $A\vec{x} \neq \lambda \vec{x}$)

Alternativ 2: $A\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

Derfor er $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en egenvektor med egenverdi -1, som det står

Alternativ 3: forkastes, fordi den sier egenverdi 1 for $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Vi har også $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ egenvektor, egenverdi 1.

Hvorfor egenvektorer?

Tenk deg at $\vec{x}_1$ er en egenvektor, egenverdi λ_1, $(A\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_1)$
$\vec{x}_2$ er en egenvektor, egenverdi λ_2. $(A\vec{x}_2 = \lambda_2\vec{x}_2)$

tall

Da får vi $A^{100}(c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2)$

$$= c_1 A^{100}\vec{x}_1 + c_2 A^{100}\vec{x}_2$$
$$= c_1 A^{99}A\vec{x}_1 + c_2 A^{99}A\vec{x}_2$$
$$= c_1 A^{99}\lambda_1\vec{x}_1 + c_2 A^{99}\lambda_2\vec{x}_2$$
$$\vdots$$
$$= c_1\lambda_1^{100}\vec{x}_1 + c_2\lambda_2^{100}\vec{x}_2$$

Setning 1.10.2 Affine avbildninger avbilder rette linjer på rette linjer.

Bevis: En rett linje i $\mathbb{R}^n$ har formen $\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{b}$
$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ $\quad$ ($\vec{b}$: retningsvektor)

anta $\vec{F}(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{c}$

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}(t)) &= A\vec{r}(t) + \vec{c} \\ &= A(\vec{a} + t\vec{b}) + \vec{c} \\ &= A\vec{a} + \vec{c} + tA\vec{b} \\ &= \vec{F}(\vec{a}) + t(A\vec{b}),\end{aligned}$$

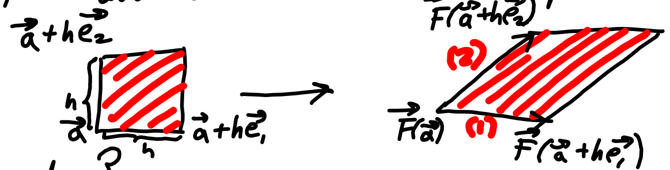
som også er en rett linje, med retningsvektor $A\vec{b}$

Observasjon: Affine avbildninger avbilder parallelle linjer på parallelle linjer:

$$\left.\begin{aligned}\vec{F}(\vec{a}_1 + t\vec{b}) &= \vec{F}(\vec{a}_1) + t(A\vec{b}) \\ \vec{F}(\vec{a}_2 + t\vec{b}) &= \vec{F}(\vec{a}_2) + t(A\vec{b})\end{aligned}\right\}$$

parallelle, siden samme retningsvektor $A\vec{b}$.

Spesielt: $\vec{F}$ avbilder et kvadrat på et parallellogram.



(1) $\vec{F}(\vec{a}+h\vec{e}_1) - \vec{F}(\vec{a})$

(2) $\vec{F}(\vec{a}+h\vec{e}_2) - \vec{F}(\vec{a})$

Hva skjer med arealet?

Areal venstre: h^2

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{a}+h\vec{e}_1) - \vec{F}(\vec{a}) &= A(\vec{a} + h\vec{e}_1) + \vec{c} - (A\vec{a} + \vec{c}) \\ &= Ah\vec{e}_1 = h\,A\vec{e}_1\end{aligned}$$

($A\vec{e}_1$: første søyle i A.)

$$\vec{F}(\vec{a}+h\vec{e}_2) - \vec{F}(\vec{a}) = \dots\ h\,A\vec{e}_2.$$

1.8.2 i boka: Arealet som er utspent av $\vec{x}$ og $\vec{y}$ er $|\det(\vec{x}, \vec{y})|$

her: $|\det(\vec{x}, \vec{y})| = |\det(hA\vec{e}_1, hA\vec{e}_2)| = h^2 |\det(A\vec{e}_1, A\vec{e}_2)|$
$= h^2 |\det A|$. (areal høyre side)

Med andre ord: $|\det A|$ fungerer som en forstørrelsesfaktor for arealer.

Seksjon 2.7: Kjerneregelen

$\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kalles også for en vektorvaluert funksjon.

Anta at vi har to mengder $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$, og to funksjoner: $\vec{G}: A \to B$, $\vec{F}: B \to \mathbb{R}^k$.

Dersom $\vec{G}$ er deriverbar i $\vec{a} \in A$
$\vec{F}$ er deriverbar i $\vec{b} = \vec{G}(\vec{a})$

Da er den sammensatte funksjonen $\vec{H}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{G}(\vec{x}))$ deriverbar i $\vec{a}$, og Jacobimatrisen til $\vec{H}$ i $\vec{a}$ er $\vec{H}'(\vec{a}) = \vec{F}'(\underbrace{\vec{G}(\vec{a})}_{\vec{b}})\, \vec{G}'(\vec{a})$

Husk: Jacobimatrisen til $\vec{F}$ i $\vec{a}$ er (se seksjon 2.6)

$$\vec{F}'(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

← gradienten til første komponentfunksjon F_1.

komponentene F_i til $\vec{F}$: $\vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), F_2(\vec{x}), \dots, F_m(\vec{x}))$

Jacobimatrisen forutsetter at alle komponentfunksjoner er deriverbare, men det er ikke nok at Jacobimatrisen finnes for at $\vec{F}$ skal bli deriverbar (se seksjon 2.6)

Eksempel: La $\vec{r}(t)$ være en kurve i $\mathbb{R}^2$ (dvs. $\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$) ($\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$)

La også $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, anta $\vec{r}$ og f begge deriverbare.

Da er $h(t) = \underbrace{f}_{\vec{F}}(\underbrace{\vec{r}(t)}_{\vec{G}})$ også deriverbar, og

$$h'(t) = f'(\vec{r}(t))\,\vec{r}\,'(t)$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{r}(t)) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{r}(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underbrace{\frac{\partial x_1}{\partial t}(t)}_{x_1'(t)} \\ \underbrace{\frac{\partial x_2}{\partial t}(t)}_{x_2'(t)} \end{bmatrix}$$
$$= \underline{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{r}(t))\,x_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{r}(t))\,x_2'(t)}$$

Anta nå at $f(\vec{x}) = x_1^2 x_2$ | $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x_1 \\ \leftarrow x_2 \end{matrix}$

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1x_2 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^2$ | $x_1'(t) = 2t \quad x_2'(t) = 3t^2$

Vi får nå $h'(t) = 2x_1x_2 \cdot 2t + x_1^2 \cdot 3t^2$

$$= 2 \cdot t^2 \cdot t^3 \cdot 2t + t^4 \cdot 3t^2$$
$$= 4t^6 + 3t^6 = \underline{7t^6}$$

Vi kan faktisk regne ut Jacobimatrisen til $\vec{H}$, hvis vi kun vet Jacobimatrisene til $\vec{F}$ og $\vec{G}$ (trenger ikke $\vec{F}, \vec{G}$ selv).

Eksempel: Anta $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, deriverbare.

Anta og $\vec{G}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{G}'\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 4\\3 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}$

$$\vec{F}'\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

Da er $\vec{H} = \vec{F}(\vec{G}(\vec{x}))$ deriverbar i $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, og

$$\begin{aligned}
\vec{H}'(\vec{a}) &= \vec{F}'(\vec{G}(\vec{a}))\,\vec{G}'(\vec{a}) \\
&= \vec{F}'\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\vec{G}'\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\1 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\3 & 0\\1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 12\\8 & 10\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$