2.8 Linearisering

Definisjon 2.8.2
Anta at $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^m$ er en funksjon i n variable, og er deriverbar i $\vec{a} \in A$.
Affinavbildningen $T_a \vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gitt ved

$$T_a \vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{a}) + \vec{F}'(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a})$$

kalles for lineariseringen til $\vec{F}$ i $\vec{a}$

Merk: $T_a \vec{F}$ er definert på hele $\mathbb{R}^n$ ($\vec{F}$ er ikke nødvendigvis det.

Eksempel: Hva blir lineariseringen til $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gitt ved $\vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^y \\ e^{x^2} \\ xy \end{pmatrix}$, i $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

Løsning:
$$\vec{F}(\vec{a}) = \vec{F}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^y & xe^y \\ 2xe^{x^2} & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \qquad \vec{F}'\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_a \vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\vec{F}(\vec{a})} + \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}^{\vec{F}'(\vec{a})} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\vec{a}} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

Observasjon: For en affinavbildning $\vec{F}$, så er $\vec{F} = T_a \vec{F}$:

$\vec{F}(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{c}$, da er $\vec{F}'(\vec{x}) = A \Rightarrow \vec{F}'(\vec{a}) = A$.

(siden $F_i(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + c_i$, $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = a_{ij}$)

$\vec{F}(\vec{a}) = A\vec{a} + \vec{c}$.

Vi får nå: $T_a \vec{F} = \vec{F}(\vec{a}) + \vec{F}'(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a})$

$$= A\vec{a} + \vec{c} + A(\vec{x} - \vec{a})$$
$$\underline{A\vec{a}} + \vec{c} + A\vec{x} - \underline{A\vec{a}}$$
$$= A\vec{x} + \vec{c} = \vec{F}(\vec{x}).$$

3.1 Parametriserte kurver

Definisjon 3.1.3
En parametrisert kurve i $\mathbb{R}^n$ er en kontinuerlig funksjon $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^n$, der I er et intervall.
Vi skriver ofte $\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$.

Vi skal lære:

1) Regne ut lengden til en kurve
2) Finne hastighetsvektoren $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$,
   fart $v(t) = |\vec{r}\,'(t)|$, langs kurven (tenk på t som tid)
3) Finne akselerasjonsvektoren $\vec{a}(t) = \vec{r}\,''(t)$,
   baneakselerasjonen $a(t) = v'(t)$, langs kurven.
4) Plotte kurver i $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$.

Eksempel 1: La $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

hastighet: $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$
fart: $v(t) = |\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
konstant fart!

akselerasjon: $\vec{a}(t) = \vec{r}\,''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$
baneakselerasjon: $a(t) = v'(t) = 0$. Ingen baneakselerasjon!

Eksempel 2: $\vec{r}(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2))$

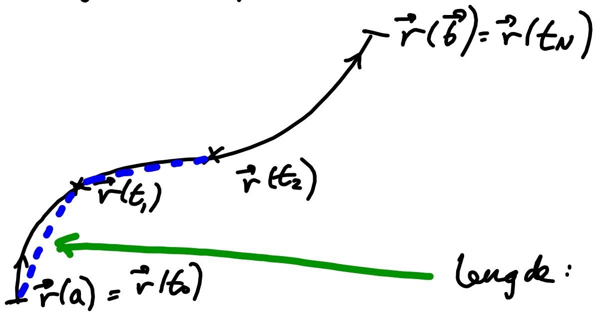
$\vec{v}(t) = (-2t\sin(t^2), 2t\cos(t^2))$

$$v(t) = |\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{(-2t\sin(t^2))^2 + (2t\cos(t^2))^2}$$
$$= \sqrt{4t^2(\sin^2(t^2) + \cos^2(t^2))}$$
$$= \sqrt{4t^2} = |2t|$$

ser: fart øker nå med tiden, på grunn av t^2-leddet.

Lengde: Hva er lengden til en kurve?

Vi skriver $I = [a, b]$, og la $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = b$ være en partisjon av I.



Vil tilnærme lengden til kurven, ved å legge sammen lengdene på de blå linjestykkene

lengde: $\left|\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)\right|$

$$= \left|\left(x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1)\right) - \left(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)\right)\right|$$

$$= \left|\left(x_1(t_1) - x_1(t_0), \ldots, x_n(t_1) - x_n(t_0)\right)\right|$$

$$= \sqrt{(x_1(t_1) - x_1(t_0))^2 + \cdots + (x_n(t_1) - x_n(t_0))^2}$$

Lengden av hele kurven $\approx \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \sqrt{(x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}))^2 + \cdots + (x_n(t_i) - x_n(t_{i-1}))^2}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{x_1(t_i) - x_1(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_n(t_i) - x_n(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2}\,(t_i - t_{i-1})$$

$$\approx \sum_{i=1}^{N} \sqrt{x_1'(t_i)^2 + \cdots + x_n'(t_i)^2}\,(t_i - t_{i-1}),$$

som er en Riemannsum for integralet $\displaystyle\int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}\, dt$

Vi skriver $\underline{L(a,b)}$ for dette integralet, og kaller det også for **buelengde.**

Eksempel 1 igjen: Buelengden til spiralen blir

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+1}\, dt = \underline{\underline{2\pi\sqrt{2}}}$$

Merk: $\sqrt{x_1'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}$ er farten

Setning 3.1.10

Anta $\vec{r}_1(t)$ og $\vec{r}_2(t)$ er to deriverbare, parametriserte kurver. Da gjelder:

(i) $(\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t))' = \vec{r}_1{}'(t)+\vec{r}_2{}'(t)$

(ii) ....

(iii) $(\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t))' = \vec{r}_1{}'(t)\cdot\vec{r}_2(t)+\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2{}'(t).$

(iv) ....

(v) ....

Bevis for (iii): $(\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t))' = ((x_1(t),\dots,x_n(t))\cdot(y_1(t),\dots,y_n(t)))'$

$$= (x_1(t)y_1(t)+\dots+x_n(t)y_n(t))'$$

$$= (x_1(t)y_1(t))'+\dots+(x_n(t)y_n(t))'$$

$$= x_1'(t)y_1(t)+x_1(t)y_1'(t)+\dots+x_n'(t)y_n(t)+x_n(t)y_n'(t)$$

$$= \underline{x_1'(t)y_1(t)+\dots+x_n'(t)y_n(t)} + \underline{x_1(t)y_1'(t)+\dots+x_n(t)y_n'(t)}.$$

$$= \vec{r}_1{}'(t)\cdot\vec{r}_2(t)+\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2{}'(t) \quad \blacksquare$$

Merk: Dersom $|\vec{r}(t)|$ er konstant (som i en sirkelbevegelse), da er $\vec{r}(t)$ og $\vec{v}(t)=\vec{r}\,'(t)$ ortogonale:

konstant $= |\vec{r}(t)|^2 = \vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t)$

$$\Downarrow$$

$$0 = (\vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t))' = \vec{r}\,'(t)\cdot\vec{r}(t)+\vec{r}(t)\cdot\vec{r}\,'(t)$$

$$= 2\vec{r}(t)\cdot\vec{r}\,'(t) \Rightarrow \vec{r}(t)\cdot\vec{v}(t)=0.$$

$\vec{T}(t)=\dfrac{\vec{v}(t)}{v(t)}$ kalles for enhetstangentvektoren til kurven.

Siden $|\vec{T}(t)|$ er konstant, og $\vec{v}(t)=v(t)\,\vec{T}(t)$:

$$\vec{a}(t)=\vec{v}\,'(t) \overset{\text{regneregel (v)}}{=} v'(t)\,\vec{T}(t)+v(t)\,\vec{T}\,'(t)$$

$$= \underbrace{a(t)\,\vec{T}(t)}_{\text{aks.-komponent; fartsretningen}} + \underbrace{v(t)\,\vec{T}\,'(t)}_{\text{aks.-komponent ortogonalt på fartsretningen.}}$$

For spiralen så var $a(t)=0$, så akselerasjonen er ortogonalt på fartsretningen.