I dag: 3.2 – 3.4 i FVLA

Ukesoppgavene

Seksjon 3.2 Litt mer om kjerneregelen for parametriserte kurver:

Hvis $\vec{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, og $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er deriverbare

Da er $h(t) = f(\vec{r}(t))$ også deriverbar, og

$$h'(t) = \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{r}(t)) \; \cdots \; \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{r}(t)) \right]}_{\vec{F}'(\vec{G}(\vec{x}))} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}}_{\vec{G}'(\vec{x})}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{r}(t))\, x_1'(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{r}(t))\, x_n'(t)$$

$$= \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t).$$

Merk: I $f(\vec{r}(t))$, så er f bare avhengig av posisjonen $\vec{r}(t)$

I $\vec{F}(\underbrace{\vec{r}(t), t}_{\vec{G}(t)})$ så er $\vec{F}$ avhengig av <u>både</u> posisjon og tid.

I meteorologi: $\vec{F}$ kan ha komponenter, som temperatur, trykk, nedbør, luftfuktighet. Disse er også avhengige av tid.

Kjerneregelen her:

$$\vec{G}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{F}'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} & \frac{\partial F_m}{\partial t} \end{pmatrix}$$

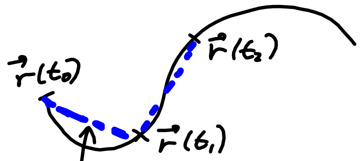
$$= \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_n} \; \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} \right)$$

$$\vec{F}'(\vec{r}(t), t)\, \vec{G}'(t) = \underline{\frac{\partial \vec{F}}{\partial x_1} x_1'(t) + \cdots + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_n} x_n'(t) + \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}}$$

(se oppg. 3.2.7, eksempel 3.2.4).

Seksjon 3.3 Linjeintegraler for skalarfelt

Motivasjon: Regne ut massen til en "tråd" i rommet $\to \vec{r}(t)$, der $f(\vec{x})$ beskriver tettheten til tråden i et punkt $\vec{x}$.



lengde $\approx \underbrace{v(t_0)(t_1-t_0)}_{s=vt}$

masse $\approx f(\vec{r}(t_0))\,v(t_0)(t_1-t_0)$

summerer: $\sum_{i=1}^{N} f(\vec{r}(t_i))\,v(t_i)(t_i-t_{i-1})$

Riemannsum for $\int_a^b f(\vec{r}(t))\,v(t)\,dt$

Dette kalles for linjeintegralet av skalarfeltet f.

Vi skriver også $\int_{\mathcal{C}} f\,ds$ for dette, der $\mathcal{C}$ betegner kurven.

Her er $\vec{r}(t)$ det vi kaller en stykkevis glatt parametrisering av $\mathcal{C}$:
1) $\vec{r}$ kontinuerlig på $[a,b]$
2) $\vec{r}\,'$ kontinuerlig på (a,b)

Stykkevis: kan splittes opp i flere slike

Setning 3.3.6: Hvis $\vec{r}_1(t)$ og $\vec{r}_2(t)$ er to "ekvivalente" slike parametriseringer, så er

$$\int_a^b f(\vec{r}_1(t))\,v_1(t)\,dt = \int_c^d f(\vec{r}_2(t))\,v_2(t)\,dt$$

Ekvivalent: se definisjon 3.3.5

$\vec{r}_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n \qquad \vec{r}_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$

$\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ er ekvivalente: Finnes en $\phi : [a,b] \to [c,d]$ slik at $\vec{r}_2(\phi(t)) = \vec{r}_1(t)$.

ϕ strengt voksende: $\mathcal{C}$ gjennomløpes samme vei (sier at $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ har samme orientering)

ϕ —"— avtakende: —"— motsatt —"—
(sier at $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ har motsatt orientering)

Setning 3.3.3: $\int_{\mathcal{C}} f\,ds$ oppfyller kjente regneregler, for eksempel:

$$\int_{\mathcal{C}} f\,ds + \int_{\mathcal{C}} g\,ds = \int_{\mathcal{C}} (f+g)\,ds.$$

Eksempel: La C være skjæringskurven mellom planene $x+2y+3z=1$, og $3x+2y+z=1$, og som ligger i første oktant $(x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$.
Finn linjeintegralet $\int_C f\,ds$, der $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

Løsning:

$$x+2y+3z=1 \quad \cdot(-3)$$
$$3x+2y+z=1$$

$$\Rightarrow -4y-8z=-2$$
$$2y+4z=1$$
$$y=\frac{1}{2}-2z$$
$$x=1-2y-3z$$
$$=1-1+4z-3z=z$$

Så en parametrisering blir:

$$\vec{r}(z)=(\underbrace{z}_{\geq 0},\underbrace{\tfrac{1}{2}-2z}_{\geq 0},z)$$

$$\frac{1}{2}-2z\geq 0$$
$$\frac{1}{4}\geq z$$

segmentet av denne i første oktant: $0\leq z\leq \frac{1}{4}$

$$\vec{r}\,'(z)=(1,-2,1)$$
$$v(z)=|\vec{r}\,'(z)|=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{6}$$
$$f(\vec{r}(z))=x^2+y^2+z^2=z^2+(\tfrac{1}{2}-2z)^2+z^2$$
$$=2z^2+4z^2-2z+\frac{1}{4}=6z^2-2z+\frac{1}{4}$$

$$\int_C f\,ds=\int_a^b f(\vec{r}(z))\,v(z)\,dz$$
$$=\int_0^{\frac{1}{4}}(6z^2-2z+\tfrac{1}{4})\sqrt{6}\,dz$$
$$=\sqrt{6}\left[2z^3-z^2+\tfrac{1}{4}z\right]_0^{\frac{1}{4}}=\cdots=\frac{\sqrt{6}}{32}$$

Seksjon 3.4 Linjeintegraler for vektorfelt.

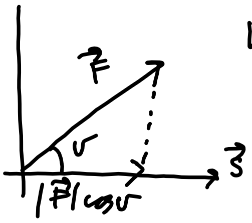
Definisjon 3.4.1

La $\vec{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ være en stykkevis glatt parametrisering av en (orientert) kurve i $\mathbb{R}^n$, og $\vec{F}(x_1, \dots, x_n)$ et vektorfelt langs $\mathcal{C}$. Linjeintegralet av vektorfeltet langs $\mathcal{C}$ er definert ved

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$$

Kalles også for arbeidet utført av $\vec{F}$ langs $\mathcal{C}$

Merk: Motivasjon fra fysikk:
Arbeidet en kraft utfører når man flytter en gjenstand strekning s er $W = |F| s$, når kraften peker i bevegelsens retning.



$W = |\vec{F}|\cos v\, |\vec{s}|$ —— " —— ikke peker —— " ——

$$= \vec{F} \cdot \vec{s} \qquad s = vt$$

$$\underbrace{\vec{F}(\vec{r}(t_i))}\cdot \underbrace{\vec{r}\,'(t_i)\Delta t_i}$$

Merk: $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ skifter fortegn hvis vi bytter til en parametrisering der $\mathcal{C}$ gjennomløpes motsatt vei. (setning 3.4.5).

Eksempel: Spiralen $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$.
Vi definerer $\vec{F}(x,y,z) = (2,1,0)$. Regn ut $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Løsning:

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (2,1,0)$$

$$\vec{r}\,'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) = (2,1,0) \cdot (-\sin t, \cos t, 1)$$

$$= -2\sin t + \cos t$$

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \underbrace{(-2\sin t + \cos t)}_{\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)} dt = \underline{0}$$

De utførte arbeidene kansellerer hverandre.